Base PBW

Florence Clerc

27 juin 2013

Todo list

1 Cadre

Soit X un alphabet totalement ordonné : $X = \{x_1 < ... < x_m\}$. On étend cet ordre en l'ordre deglex sur tout $\mathbb{K}\langle X \rangle = V$. L'ensemble X est donc une base de l'espace V et $X^{(2)}$ est une base de $V^{\otimes 2}$ via l'ordre deglex

Soit R un ensemble de relations quadratiques sur $V^{\otimes 2}$. On note E le sous-espace de V engendré par R.

Soit $\mathbf{A} = \mathbf{A}(X, R) = \mathbf{A}(V, E)$. On note la projection canonique :

$$\begin{cases} V \to \mathbf{A} \\ x \mapsto \overline{x} \end{cases}$$

2 Définition d'une algèbre PBW

On considère l'ensemble

$$S = \{(i_1, i_2) | \overline{x_{i_1} x_{i_2}} \notin Vect\left(\overline{x_{j_1} x_{j_2}} | (j_1, j_2) < (i_1, i_2)\right)\}$$

Remarque 1. Si le couple (i_1, i_2) est dans l'ensemble S, alors $x_{i_1} x_{i_2} = \overline{x_{i_1} x_{i_2}}$.

Lemme 1. La famille $(\overline{x_{i_1} x_{i_2}})_{(i_1, i_2) \in S}$ forme une base de $V^{\otimes 2}/E$.

Démonstration. Commençons par montrer que la famille $(\overline{x_{i_1} x_{i_2}})_{(i_1, i_2) \in S}$ est une famille libre de $V^{\otimes 2}/E$. On se donne une combinaison linéaire nulle de ses éléments :

$$\sum_{(i_1, i_2) \in S} \mu_{(i_1, i_2)} \overline{x_{i_1} x_{i_2}} = 0$$

Soit $(j_1, j_2) = max\{(i_1, i_2) \in S | \mu_{(i_1, i_2)} \neq 0\}$. Comme par définition de l'ensemble S, $\overline{x_{j_1} x_{j_2}}$ n'est pas dans l'espace $Vect\left(\overline{x_{i_1} x_{i_2}} | (i_1, i_2) < (j_1, j_2)\right)$, on a nécessairement pour $(i_1, i_2) < (j_1, j_2)$: $\mu_{(i_1, i_2)} = 0$ et $\mu_{(j_1, j_2)} = 0$.

On montre ensuite que la famille $(\overline{x_{i_1} x_{i_2}})_{(i_1, i_2) \in S}$ est une famille génératrice de $V^{\otimes 2}/E$. Soit v dans l'espace $V \otimes V$:

$$v = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{m} v_{(i,j)} x_i x_j$$

Par conséquent, dans l'algèbre $\mathbf{A}$:

$$\overline{v} = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{m} v_{(i,j)} \overline{x_i x_j}$$

Soit $(k,l) = max\{(i,j)|v_{(i,j)} \neq 0\}$. Il y a deux cas à distinguer.
Si (k,l) est dans l'ensemble S, alors on garde $\overline{x_k x_l}$ dans la décomposition de $\overline{v}$. Sinon, $\overline{x_k x_l}$ se réécrit en $\sum_{(a,b)<(k,l)} \xi_{(a,b)} \overline{x_a x_b}$. On réitère ce processus. Ce processus s'arrête bien et on obtient une décomposition de $\overline{v}$ de la forme :

$$\overline{v} = \sum_{(i,j)\in S} v'_{(i,j)} \overline{x_i x_j}$$

□

Lemme 2. (Caractérisation de l'ensemble S) Une base de l'espace des relations E est formée par les vecteurs

$$x_{i_1} x_{i_2} - \sum_{(j_1,j_2)<(i_1,i_2) \text{ et } (j_1,j_2)\in S} \lambda_{(i_1,i_2)}^{(j_1,j_2)} x_{j_1} x_{j_2}$$

où $(i_1, i_2) \in [\![1,m]\!]^2 \setminus S$

Démonstration. Pour $(i_1, i_2) \in [\![1,m]\!]^2 \setminus S$, on prend $\lambda_{(i_1,i_2)}^{(j_1,j_2)}$ tel que dans l'algèbre $\mathbf{A}$:

$$\overline{x_{i_1} x_{i_2}} = \sum_{(j_1,j_2)<(i_1,i_2) \text{ et } (j_1,j_2)\in S} \lambda_{(i_1,i_2)}^{(j_1,j_2)} \overline{x_{j_1} x_{j_2}}$$

Ceci est bien possible car par définition, si le couple (i_1, i_2) n'est pas dans l'ensemble S, alors $\overline{x_{i_1} x_{i_2}}$ est dans l'espace $Vect\,(\overline{x_{j_1} x_{j_2}}|(j_1,j_2) < (i_1,i_2))$.

Cette famille est bien libre. On considère une combinaison linéaire nulle dans $V \otimes V$ de ses éléments :

$$\sum_{(i_1,i_2)\notin S} \mu_{(i_1,i_2)} \left(x_{i_1} x_{i_2} - \sum_{(j_1,j_2)<(i_1,i_2) \text{ et } (j_1,j_2)\in S} \lambda_{(i_1,i_2)}^{(j_1,j_2)} x_{j_1} x_{j_2} \right) = 0$$

Cette combinaison linéaire s'écrit également :

$$\sum_{(i_1,i_2)\notin S} \mu_{(i_1,i_2)} x_{i_1} x_{i_2} - \sum_{(j_1,j_2)\in S} \left(\sum_{(j_1,j_2)<(k_1,k_2) \text{ et } (k_1,k_2)\notin S} \mu_{(k_1,k_2)} \lambda_{(i_1,i_2)}^{(j_1,j_2)} \right) x_{j_1} x_{j_2} = 0$$

Comme la famille $(x_{i_1} x_{i_2})_{(i_1,i_2)\in[\![1,m]\!]^2}$ forme une base de $V \otimes V$, on sait que chacun des coefficients de cette somme est nul.

Par le lemme 1, on sait que $dim(V/E) = card(S)$, et on sait également que $dimV = m^2$. Par conséquent $dimE = m^2 - card(S)$. Donc par égalité des dimension, cette famille est une base de E.

Il reste à montrer que cette propriété caractérise bien l'ensemble S.

Soit une base $\mathcal{B}$ de l'espace E dont les vecteurs sont de la forme

$$x_{i_1} x_{i_2} - \sum_{(j_1,j_2)<(i_1,i_2)} \lambda_{(i_1,i_2)}^{(j_1,j_2)} x_{j_1} x_{j_2}$$

où $(i_1, i_2) \in \overline{S}$. L'ensemble $\overline{S}$ est un sous-ensemble de $[\![1,m]\!]$. On pose $S = [\![1,m]\!] \setminus \overline{S}$. Par définition, l'ensemble S est bien :

$$S = \{(i_1,i_2)|\overline{x_{i_1} x_{i_2}} \notin Vect\,(\overline{x_{j_1} x_{j_2}}|(j_1,j_2) < (i_1,i_2))\}$$

Par conséquent, à partir d'une telle base de l'espace E, on est capable de définir un ensemble S.

De plus, si on considère deux ensembles S_1 et S_2 tels qu'ils définissent la même base de l'espace E, on a nécessairement $S_1 = S_2$. □

On pose ensuite pour $n \geq 3$

$$\begin{aligned} S^{(0)} &= \emptyset \\ S^{(1)} &= [\![1,m]\!] \\ S^{(2)} &= S \\ S^{(n)} &= \{(i_1,i_2,...,i_n)|(i_1,i_2),(i_2,i_3),...,(i_{n-1},i_n) \in S\} \end{aligned}$$

Pour un n-uplet $\alpha = (i_1, i_2, ..., i_n)$, on note $x_\alpha = x_{i_1} ... x_{i_n}$.

Définition 1. Si la famille $\mathcal{B} = (x_\alpha)_{\alpha \in \cup_{n\geq 0} S^{(n)}}$ forme une base de $\mathbf{A}$, les vecteurs $x_1, ..., x_m$ sont appelés générateurs PBW et la base $\mathcal{B}$ est appelée base de PBW de $\mathbf{A}$.

Définition 2. Une algèbre est dite PBW si elle admet une base de PBW.

Remarque 2. On peut vérifier qu'une telle famille est toujours génératrice de $\mathbf{A}$. Il n'y a donc qu'à vérifier qu'elle est libre.

Remarque 3. Pour un entier n, le n-uplet $(i_1, ..., i_n)$ est dans l'ensemble $S^{(n)}$ si, et seulement si, $\overline{x_{i_1}...x_{i_n}} = x_{i_1}...x_{i_n}$.

Théorème 1. (Diamond Lemma for PBW) Si les monômes $(x_{i_1}x_{i_2}x_{i_3} | (i_1, i_2, i_3) \in S^{(3)})$ sont linéairement indépendants dans $\mathbf{A}_3$, alors les monômes $(x_{i_1}x_{i_2}...x_{i_n} | (i_1, i_2, ..., i_n) \in S^{(n)})$ sont linéairement indépendants dans $\mathbf{A}_n$ et alors $(x_1, ..., x_m)$ sont des générateurs PBW de $\mathbf{A}$. Donc $\mathbf{A}$ est PBW.

Démonstration. Supposons que les monômes $(x_{i_1}x_{i_2}x_{i_3} | (i_1, i_2, i_3) \in S^{(3)})$ soient linéairement indépendants dans $\mathbf{A}_3$. On définit l'espace vectoriel libre :

$$T^n(V)_{\leq \alpha} = \mathbb{K}\langle x_\beta | \beta \leq \alpha \rangle$$

On a précédemment définit l'espace vectoriel

$$I(E)^n = \sum_{k=1}^{n-1} V^{\otimes k-1} \otimes I(E) \otimes V^{\otimes n-k-1}$$

On définit également l'espace vectoriel

$$I(E)^n_{\leq \alpha} = I(E)^n \cap T^n(V)_{\leq \alpha} = \sum_{k=1}^{n-1} T^n(V)_{\leq \alpha} \cap \left(V^{\otimes k-1} \otimes I(E) \otimes V^{\otimes n-k-1}\right)$$

Commençons par montrer l'expression suivante de l'espace vectoriel $I(E)^n_{\leq \alpha}$:

$$I(E)^n_{\leq \alpha} = \mathbb{K} \left\langle x_\beta f_\eta x_\gamma \;\middle|\; \begin{cases} \beta \in [\![1, m]\!]^{k-1}, \gamma \in [\![1, m]\!]^{n-k-1} \text{ pour } 1 \leq k \leq n-1 \\ f_\eta = x_\eta - \sum_{\delta < \eta \text{ et } \delta \in S} \lambda^\delta_\eta x_\delta \in I(E) \\ \beta\eta\gamma \leq \alpha \end{cases} \right\rangle$$

recopier preuve égalité des deux expressions

Nous allons maintenant montrer par induction sur α que les monômes $(x_\beta | \beta \in S^{(n)}, \beta \leq \alpha)$ sont linéairement indépendants modulo $I(E)^n_{<\alpha}$. On rappelle que S et donc $S^{(n)}$ sont totalement ordonnés, ce qui justifie l'induction.

Il suffit de montrer que pour tout $\beta\eta\gamma = \alpha = \beta'\eta'\gamma'$, on a

$$x_\beta y_\eta x_\gamma - x_{\beta'} z_{\eta'} x_{\gamma'} \in I(E)^n_{<\alpha}$$

où $y_\eta = \mu_\eta x_\eta + \sum_{\delta < \eta \text{ et } \delta \in S} \mu_\delta x_\delta$ et $z_{\eta'} = \xi_{\eta'} x_{\eta'} + \sum_{\delta' < \eta' \text{ et } \delta' \in S} \xi_{\delta'} x_{\delta'}$. On obtient alors :

$$x_\beta y_\eta x_\gamma - x_{\beta'} z_{\eta'} x_{\gamma'} \quad = \quad (\mu_\eta - \xi_{\eta'}) x_\alpha + \sum_{\delta < \eta \text{ et } \delta \in S} \mu_\delta x_\beta x_\delta x_\gamma - \sum_{\delta' < \eta' \text{ et } \delta' \in S} \xi_{\delta'} x_{\beta'} x_{\delta'} x_{\gamma'}$$

finir récurrence

Si les monômes $(x_{i_1}x_{i_2}...x_{i_n} | (i_1, i_2, ..., i_n) \in S^{(n)})$ sont linéairement indépendants dans $\mathbf{A}_n$ pour tout $n \geq 3$, alors la famille $\mathcal{B} = (x_\alpha)_{\alpha \in \cup_{n\geq 0} S^{(n)}}$ est libre dans l'algèbre $\mathbf{A}$ (car les relations sont homogènes), donc $(x_1, ..., x_m)$ sont des générateurs PBW de $\mathbf{A}$ et $\mathbf{A}$ est PBW. □

3 Comparaison entre base PBW et bases de Gröbner

Théorème 2. Posons

$$G = \left\{ x_{i_1}x_{i_2} - \sum_{(j_1,j_2)<(i_1,i_2) \text{ et } (j_1,j_2)\in S} \lambda_{(i_1,i_2)}^{(j_1,j_2)} x_{j_1}x_{j_2} \,\middle|\, (i_1,i_2) \in [\![1,m]\!]^2 \setminus S \right\}$$

Les deux propriétés suivantes sont équivalentes :

1. L'algèbre **A** est PBW,
2. L'ensemble G est une base de Gröbner de $I(E)$,
3. La relation de réécriture $\Rightarrow_G$ est confluente.

Démonstration. Commençons par montrer l'équivalence entre 2 et 3. L'implication directe est donnée par la définition d'une base de Gröbner. La réciproque est donnée par le lemme 2.

On montre ensuite que le point 1 implique le point 3. Pour cela, il suffit de montrer la confluence des paires critiques. Donnons-nous un élément $x_{i_1}x_{i_2}x_{i_3}$ de $V^{\otimes 3}$ tel que

$$\overline{x_{i_1}x_{i_2}} = \sum_{(j_1,j_2)<(i_1,i_2) \text{ et } (j_1,j_2)\in S} \lambda_{(i_1,i_2)}^{(j_1,j_2)} \overline{x_{j_1}x_{j_2}}$$

et

$$\overline{x_{i_2}x_{i_3}} = \sum_{(k_2,k_3)<(i_2,i_3) \text{ et } (k_2,k_3)\in S} \lambda_{(i_2,i_3)}^{(k_2,k_3)} \overline{x_{k_2}x_{k_3}}$$

Si cette paire critique n'est pas confluente, alors l'élément $x_{i_1}x_{i_2}x_{i_3}$ a deux formes normales qu'on note (en utilisant la remarque 3) :

$$\begin{aligned} \overline{x_{i_1}x_{i_2}x_{i_3}} &= \sum_{(a_1,a_2,a_3)\in S^{(3)}} \mu_{(a_1,a_2,a_3)} x_{a_1}x_{a_2}x_{a_3} \\ &= \sum_{(b_1,b_2,b_3)\in S^{(3)}} \xi_{(b_1,b_2,b_3)} x_{b_1}x_{b_2}x_{b_3} \end{aligned}$$

On a donc dans $V^{\otimes 3}$

$$\sum_{(a_1,a_2,a_3)\in S^{(3)}} (\mu_{(a_1,a_2,a_3)} - \xi_{(a_1,a_2,a_3)}) x_{a_1}x_{a_2}x_{a_3} = 0$$

Comme l'algèbre **A** est PBW, la famille $\mathcal{B} = (x_\alpha)_{\alpha\in\cup_{n\geq 0}S^{(n)}}$ est libre. Donc pour tout triplet $(a_1,a_2,a_3) \in S^{(3)}$, on a :

$$\mu_{(a_1,a_2,a_3)} = \xi_{(a_1,a_2,a_3)}$$

Par conséquent, les deux formes normales sont égales. D'où la confluence de toutes les paires critiques.

Enfin, il reste à montrer que le point 2 implique le point 1. Si l'ensemble G est une base de Gröbner, alors toutes les paires critiques sont convergentes. On se donne la combinaison linéaire dans l'algèbre **A**

$$\sum_{(i_1,i_2,i_3)\in\mathcal{I}} \mu_{(i_1,i_2,i_3)} x_{i_1}x_{i_2}x_{i_3} = 0$$

où $\mathcal{I}$ est un sous-ensemble non vide de $S^{(3)}$ tel que $\mu_{(i_1,i_2,i_3)} \neq 0$ pour $(i_1,i_2,i_3) \in \mathcal{I}$ car $\mathcal{I} \subset S^{(3)}$. On sait qu'il existe (i_1,i_2,i_3) et (j_1,j_2,j_3) dans l'ensemble $\mathcal{I}$ tels que $i_1 \neq j_1$ et (a_1,a_2,a_3) et (b_1,b_2,b_3) dans l'ensemble $\mathcal{I}$ tels que $a_3 \neq b_3$.

Soit (j_1,j_2,j_3) élément maximal de $\mathcal{I}$, on a alors la règle de réécriture (minimale par la remarque précédemment faite)

$$x_{j_1}x_{j_2}x_{j_3} \Rightarrow \sum_{(i_1,i_2,i_3)\in\mathcal{I}} \xi_{(i_1,i_2,i_3)} x_{i_1}x_{i_2}x_{i_3}$$

Mais ceci est impossible car l'élément $x_{j_1}x_{j_2}x_{j_3}$ est en forme normale (de plus, la forme de la base de Gröbner l'interdirait).

Par conséquent les monômes $(x_{i_1}x_{i_2}x_{i_3} | (i_1,i_2,i_3) \in S^{(3)})$ sont linéairement indépendants dans $\mathbf{A}_3$. Donc par le théorème 1, l'algèbre **A** est PBW. $\square$

Remarque 4. Étant donnée une base de Gröbner quadratique, le lemme 2 donne l'ensemble S, par conséquent, on peut écrire la base G sous la forme demandée dans le théorème 2. Par conséquent, à toute base de Gröbner quadratique on peut associer une base PBW, et réciproquement.

4 Comparaison entre base PBW et base X-canonique

On définit l'opérateur de $X^{(2)}$-réduction $U : V \otimes V \to V \otimes V$ par :

$$U(x_{i_1}x_{i_2}) = \begin{cases} x_{i_1}x_{i_2} \text{ si } (i_1,i_2) \in S \\ \sum_{(j_1,j_2)<(i_1,i_2) \text{ et } (j_1,j_2)\in S} \lambda_{(i_1,i_2)}^{(j_1,j_2)} x_{j_1}x_{j_2} \text{ sinon} \end{cases}$$

Pour $n \geq 3$ et $1 \geq i \geq n-1$, on définit l'opérateur $U^{(i)} = id_{V^{\otimes(i-1)}} \otimes U \otimes id_{V^{\otimes(n-i-1)}} : V^{\otimes n} \to V^{\otimes n}$.

Lemme 3. L'algèbre **A** est PBW si, et seulement si, pour tout entier $n \geq 3$ et pour les indices $i_1, ..., i_k, j_1, ..., j_l$ tels que $[\![1, n-1]\!] = \{i_1, ..., i_k\}$ et $[\![1, n-1]\!] = \{j_1, ..., j_l\}$, on a :

$$U^{(i_1)} \circ U^{(i_2)} \circ ... \circ U^{(i_k)} = U^{(j_1)} \circ U^{(j_2)} \circ ... \circ U^{(j_l)}$$

Démonstration. preuve à faire

□

Lemme 4. On pose $U_1 = U \otimes id_V$ et $U_2 = id_V \otimes U$. Ce sont des opérateurs de $X^{(3)}$-réduction $V^{\otimes 3} \to V^{\otimes 3}$.
L'algèbre **A** est PBW si, et seulement si, (U_1, U_2) est confluent.

Démonstration. Supposons que l'algèbre **A** est PBW. Par le lemme précédent, pour tout entier n, on sait que :

$$U^{(1)} \circ U^{(2)} \circ ... \circ U^{(n-1)} = U^{(n-1)} \circ U^{(n-2)} \circ ... \circ U^{(1)} : V^{\otimes n} \to V^{\otimes n}$$

En particulier, dans le cas $n = 3$, on obtient $U_1U_2 = U_2U_1$, donc (U_1, U_2) est X-confluent.
Réciproquement, on considère l'opérateur

$$U^{(i_1)} \circ U^{(i_2)} \circ ... \circ U^{(i_k)} : V^{\otimes n} \to V^{\otimes n}$$

où $[\![1, n-1]\!] = \{i_1, ..., i_k\}$ et on suppose que (U_1, U_2) est confluent. On commence par montrer que pour tout i_j et i_k,

$$U^{(i_j)}U^{(i_k)} = U^{(i_k)}U^{(i_j)}$$

Plusieurs cas sont à considérer : les cas où $|j-k| \geq 2$ et où $j = k$ sont directs. Si $|j-k| = 1$, le résultat est donné par la confluence de (U_1, U_2).
Par conséquent, il existe une permutation de $(i_1, ..., i_k)$ notée $(i'_1, ..., i'_k)$ telle que $i'_1 < .... < i'_k$. On a par le résultat précédent :

$$U^{(i_1)} \circ U^{(i_2)} \circ ... \circ U^{(i_k)} = U^{(i'_1)} \circ U^{(i'_2)} \circ ... \circ U^{(i'_k)}$$

De plus, comme $U^{(j)}U^{(j)} = U^{(j)}$:

$$U^{(i'_1)} \circ U^{(i'_2)} \circ ... \circ U^{(i'_k)} = U^{(1)} \circ U^{(2)} \circ ... \circ U^{(n-1)}$$

Donc par le lemme 3, on obtient que l'algèbre **A** est PBW. □

5 Koszulité

Théorème 3. Si une algèbre est PBW, alors elle est Koszul.

Démonstration. On a montré que si une algèbre est PBW, alors elle admettait une base de Gröbner quadratique (théorème 2). On sait également que si une algèbre admet une base de Gröbner quadratique, alors elle est Koszul (par la résolution d'Anick). D'où le résultat souhaité. □

6 Exemple

On étudie l'algèbre

$$A = \langle x, y | xy - x^2 \rangle$$

Plus particulièrement, nous allons comparer les résultats obtenus pour deux ordres différents sur les lettres, étendus en les ordres deglex correspondants.

6.1 Premier ordre

On se donne l'ordre sur les lettres $x < y$, qu'on étend en l'ordre deglex $<$ sur les mots.

Base de Gröbner Il y a une unique relation $xy \Rightarrow xx$. Il n'y a pas de paires critiques et par conséquent, la base de Gröbner est :

$$G = \{xy \Rightarrow x^2\}$$

X-confluence On définit l'opérateur S de $X^{(2)}$-confluence comme étant l'unique opérateur de noyau $\ker(S) = \mathbb{K}\langle xy - x^2 \rangle$. On peut alors définir les opérateurs $S_1 = S \otimes id_V$ et $S_2 = id_V \otimes S$. On va calculer leur défaut d'obstruction. On a donc :

$$\begin{aligned}
\ker(S_1) &= \mathbb{K}\langle xyx - x^3, xy^2 - x^2y \rangle \\
\ker(S_2) &= \mathbb{K}\langle x^2y - x^3, yxy - yx^2 \rangle \\
\ker(S_1 \wedge S_2) &= \mathbb{K}\langle x^2y - x^3, yxy - yx^2, xyx - x^3, xy^2 - x^2y \rangle
\end{aligned}$$

Les vecteurs dans la décomposition de $\ker(S_1 \wedge S_2)$ sont indépendants, par conséquent,

$$dim \mathrm{Red}(S_1 \wedge S_2) = 4$$

On calcule maintenant la dimension de $\mathrm{Red}(S_1) \cap \mathrm{Red}(S_2)$.

$$\begin{aligned}
\mathrm{Red}(S) &= \mathbb{K}\langle x^2, yx, y^2 \rangle \\
\mathrm{Red}(S_1) &= \mathbb{K}\langle x^3, x^2y, yx^2, yxy, y^2x, y^3 \rangle \\
\mathrm{Red}(S_2) &= \mathbb{K}\langle x^3, xyx, xy^2, yx^2, y^2x, y^3 \rangle \\
\mathrm{Red}(S_1) \cap \mathrm{Red}(S_2) &= \mathbb{K}\langle x^3, yx^2, y^2x, y^3 \rangle
\end{aligned}$$

On a donc bien $dim\mathrm{Red}(S_1 \wedge S_2) = dim(\mathrm{Red}(S_1) \cap \mathrm{Red}(S_2))$ et donc

$$\mathrm{Red}(S_1 \wedge S_2) = \mathrm{Red}(S_1) \cap \mathrm{Red}(S_2)$$

L'algèbre $\mathbf{A}$ est donc bien X-confluente, et sa base X-canonique est $\{x^m y^p | m \geq 0 \text{ et } p \geq 0\}$

Base PBW En reprenant les notations précédentes, on a $x = x_1 < x_2 = y$. On commence par déterminer les ensembles S et $S^{(n)}$ pour $n \geq 3$:

$$\begin{aligned}
S &= \{(1,1), (2,1), (2,2)\} \\
S^{(n)} &= \{(\underbrace{2, ..., 2}_{k}, \underbrace{1, ..., 1}_{l}) | k + l = n \text{ et } 0 \leq k \leq n\}
\end{aligned}$$

En particulier, on peut expliciter pour $n = 3$: $S^{(3)} = \{(2,2,2), (2,2,1), (2,1,1), (1,1,1)\}$. Or l'ensemble $\{\overline{y^3}, \overline{y^2x}, \overline{yx^2}, \overline{x^3}\}$ est bien une base de $\mathbf{A}_3$. Par conséquent l'algèbre $\mathbf{A}$ est PBW.

6.2 Second ordre

On se donne l'ordre sur les lettres $y < x$, qu'on étend en l'ordre deglex $<$ sur les mots.

Base de Gröbner La relation s'écrit $xx \overset{\alpha}{\Rightarrow} xy$. Il y a une paire critique xxx :

$$\begin{tikzcd} & xxy \arrow[r, "\alpha y"] & xyy \\ xxx \arrow[ur, "x\alpha"] \arrow[dr, "\alpha x"'] & & \\ & xyx & \end{tikzcd}$$

On rajoute donc la règle $xyx \overset{\alpha_3}{\Rightarrow} xy^2$. Il y a alors deux nouvelles paires critiques : $xxyx$ et $xyxx$

$$\begin{tikzcd} & xxyy \arrow[r, "\alpha yy"] & xyyy \\ xxyx \arrow[ur, "x\alpha_3"] \arrow[dr, "\alpha yx"'] & & \\ & xyyx & \end{tikzcd}$$

On rajoute donc la règle $xy^2x \overset{\alpha_4}{\Rightarrow} xy^3$. L'autre paire critique est confluente grâce à la règle α_4. Il y a alors de nouvelles paires critiques : $xxyyx$, $xyyxx$, $xyxyyx$ et $xyyxyx$.

$$\begin{tikzcd} & xxyyy \arrow[r, "\alpha yyy"] & xyyyy \\ xxyyx \arrow[ur, "x\alpha_4"] \arrow[dr, "\alpha yyx"'] & & \\ & xyyyx & \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} & xyxyyy \arrow[r, "\alpha_3 yyy"] & xyyyyy \\ xyxyyx \arrow[ur, "xy\alpha_4"] \arrow[dr, "\alpha_3 yyx"'] & & \\ & xyyyyx & \end{tikzcd}$$

On doit donc rajouter les règles $xy^3x \overset{\alpha_5}{\Rightarrow} xy^4$ et $xy^4x \overset{\alpha_6}{\Rightarrow} xy^5$. Les autres paires critiques sont alors confluentes, mais on obtient de nouvelles paires critiques. En fait, on se rend compte que la base de Gröbner est infinie et est :

$$G = \{xy^nx \overset{\alpha_{n+2}}{\Rightarrow} xy^{n+1} | n \geq 0\}$$

Il apparait immédiatement que la base de Gröbner n'est pas quadratique.

X-confluence Le noyau ne change pas par rapport au cas précédent où $x < y$, par conséquent, on a toujours $dim\mathrm{Red}(S_1 \wedge S_2) = 4$.

On calcule maintenant la dimension de $\mathrm{Red}(S_1) \cap \mathrm{Red}(S_2)$.

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{Red}(S) & = & \mathbb{K}\langle xy, yx, y^2\rangle \\ \mathrm{Red}(S_1) & = & \mathbb{K}\langle xyx, xy^2, yx^2, yxy, y^2x, y^3\rangle \\ \mathrm{Red}(S_2) & = & \mathbb{K}\langle x^2y, yxy, xyx, y^2x, xy^2, y^3\rangle \\ \mathrm{Red}(S_1) \cap \mathrm{Red}(S_2) & = & \mathbb{K}\langle yxy, xyx, y^2x, xy^2, y^3\rangle \end{array}$$

Le défaut de confluence est donc $def_C(S_1, S_2) = 1$. L'algèbre $\mathbf{A}$ n'est pas X-confluente avec cet ordre.

Base PBW En reprenant les notations précédentes, on a $y = x_1 < x_2 = x$. Comme l'ordre des lettres a changé, on a inversé les indices correspondants. On commence par déterminer les ensembles S et $S^{(3)}$:

$$\begin{aligned} S &= \{(1,1),(1,2),(2,1)\} \\ S^{(3)} &= \{(1,1,2),(1,1,1),(1,2,1),(2,1,1),(2,1,2)\} \end{aligned}$$

Or l'ensemble $\{\overline{y^2x}, \overline{y^3}, \overline{yxy}, \overline{xy^2}, \overline{xyx}\}$ n'est pas libre dans $\mathbf{A}_3$. En effet, comme on a la paire critique xxx, on a $\overline{xyx} = \overline{xy^2}$.

Par conséquent l'algèbre $\mathbf{A}$ n'admet pas de base PBW pour cet ordre.