

Mémoire de Master  
Preuves de koszulité par réécriture

Florence Clerc

22 septembre 2013



# Table des matières

<b>1</b>	<b>Systèmes de réécriture</b>	<b>5</b>
1.1	Système de réécriture abstrait . . . . .	5
1.2	Système de réécriture de mots . . . . .	10
1.3	Système de réécriture linéaire . . . . .	13
1.4	Bases de Gröbner . . . . .	18
<b>2</b>	<b>Résolution d'Anick</b>	<b>23</b>
2.1	Idéal ordonné de monômes . . . . .	23
2.2	n-chaînes . . . . .	23
2.3	Résolution d'Anick . . . . .	26
<b>3</b>	<b>Confluence des opérateurs</b>	<b>41</b>
3.1	Opérateurs de réduction . . . . .	41
3.2	Confluence des opérateurs . . . . .	46
3.3	Lien avec les systèmes de réécriture . . . . .	47
3.4	Application aux algèbres quadratiques . . . . .	51
<b>4</b>	<b>Résolutions linéaires libres, koszulité</b>	<b>54</b>
4.1	Graduation . . . . .	54
4.2	Tor gradué . . . . .	55
4.3	Définition de la koszulité . . . . .	57
<b>5</b>	<b>Koszulité des algèbres quadratiques</b>	<b>59</b>
5.1	Base de Gröbner quadratique . . . . .	59
5.2	Complexe de Koszul, Distributivité . . . . .	62
5.3	Distributivité et $X$ -confluence . . . . .	65
5.4	Bases de Poincaré-Birkhoff-Witt . . . . .	68
5.5	Comparaison entre base PBW et bases de Gröbner . . . . .	71
5.6	Bases de Poincaré-Birkhoff-Witt et bases $X$ -canonique . . . . .	72
<b>6</b>	<b>Koszulité des algèbres homogènes</b>	<b>76</b>
6.1	Algèbres monomiales . . . . .	76
6.2	Algèbres convergentes . . . . .	77



# Introduction

L'objet de ce travail est de montrer l'utilité et la pertinence des systèmes de réécriture dans l'étude de notions mathématiques, par exemple dans le calcul d'invariants et le calcul de résolutions. Pour définir la cohomologie des algèbres de lie, Koszul a développé la notion de complexe de Koszul dans [12]. Reprise ensuite par Priddy dans [18] pour étudier les algèbres de Steenrod, elle a donné la notion de Koszulité. L'étude de la Koszulité d'une algèbre est devenue depuis un problème à part entière. En effet, si une algèbre est Koszul, il est possible de calculer sa cogèbre duale, ce qui nous en donne une résolution. La Koszulité fournit un modèle minimal. Il s'agit donc d'une description très compacte.

PAR AILLEURS De plus, l'étude des invariants mathématiques permet de déduire des propriétés des systèmes de réécriture. Citons par exemple le théorème de Squier selon lequel si le troisième groupe d'homologie d'un monoïde n'est pas de type fini, alors il ne peut pas être présenté par un système de réécriture de mots convergent.

Dans cette étude, nous considérons trois approches différentes au problème de la Koszulité, qui donneront chacune des propriétés suffisantes des algèbres afin de déterminer leur Koszulité. La première approche repose sur la présentation des algèbres par les systèmes de réécriture, et s'appuie sur les travaux d'Anick. La deuxième approche considérée est celle de Berger et repose sur la notion d'opérateurs de réduction et sur l'étude de leur confluence. La troisième approche est celle des bases de Poincaré-Birkhoff-Witt. Nous montrerons que ces approches, bien que différentes, donnent des résultats similaires.

Pour toute cette étude, on travaille avec  $\mathbb{K}$  un corps commutatif de caractéristique nulle.

Nous rappellerons des définitions et résultats fondamentaux des systèmes de réécriture dans le premier chapitre. Un système de réécriture abstrait est la donnée d'un ensemble  $\mathcal{V}$  et d'une relation binaire  $\rightarrow$  sur  $\mathcal{V}$ . Un résultat fondamental sur les systèmes de réécriture abstrait est le lemme de Newman : sous l'hypothèse de terminaison du système de réécriture, la locale confluence et la confluence correspondent. Le lemme de Newman permet d'obtenir des informations globales du système de réécriture à partir d'informations locales.

Un système de réécriture de mots est la donnée d'un alphabet  $X$  et d'un ensemble  $R$  de relations binaires sur  $X^*$ . Les propriétés des systèmes de réécriture de mots s'énoncent sur les systèmes de réécriture abstraits. À un système de réécriture de mots  $(X, R)$  correspond un système de réécriture abstrait  $(X^*, \Rightarrow_R)$  pour une certaine relation de réduction  $\Rightarrow_R$ . Nous montrerons également que les systèmes de réécriture de mots présentent les monoïdes.

La notion de système de réécriture linéaire est centrale dans cette étude. Un système de réécriture linéaire est la donnée d'un alphabet  $X$  et d'un ensemble  $R$  de relations binaires sur l'algèbre libre  $\mathbb{K}\langle X \rangle$ . On peut se restreindre au cas où les systèmes de réécriture linéaires sont monomiaux et compatibles avec un ordre monomial. Le terme monomial signifie que l'ensemble  $R$  est un sous-ensemble de  $X^* \times \mathbb{K}\langle X \rangle$ . L'hypothèse de compatibilité avec un ordre monomial signifie que l'ordre va décroître pour un certain ordre. Par système de réécriture linéaire, nous entendons système de réécriture linéaire monomial compatible avec un ordre monomial. Les propriétés des systèmes de réécriture linéaire s'énoncent sur les systèmes de réécriture abstraits. À un système de réécriture linéaire  $(X, R)$  correspond un système de réécriture abstrait  $(\mathbb{K}\langle X \rangle, \Rightarrow_R)$  pour une certaine relation de réduction  $\Rightarrow_R$ . Nous montrerons également que les systèmes de réécriture linéaires présentent les algèbres.

Nous introduisons ensuite la notion de base de Gröbner d'un idéal. La notion de base de Gröbner est centrale dans la réécriture. Elle correspond à la notion de présentation convergente pour les algèbres. Plus précisément, une base de Gröbner d'un idéal est une famille génératrice de cet idéal munie de propriétés qui s'interprètent en terme de confluence. Cette notion a été



Dans l'introduction, mettre en emphase les  
termes mathématiques importants qui  
seront définis dans le texte.

introduite dans un cadre commutatif par Buchberger en 1965 dans [7]. Nous les étudierons dans le cadre général.

Non commutatif

Le second chapitre correspond au point de vue d'Anick ([1], [2]). Cette approche repose sur la construction des  $n$ -chaînes (pour  $n \geq -1$ ) d'un système de réécriture linéaire. Une  $n$ -chaîne est un mot qui correspond à la source d'un  $n$ -uplet critique d'une certaine forme. Nous présentons le graphe d'Ufnarowski qui permet de les visualiser comme un chemin de longueur  $(n+1)$  dans ce graphe. C'est grâce aux  $n$ -chaînes que nous pourrions construire la résolution d'Anick. La résolution d'Anick est construite pour les algèbres augmentées dont on a une présentation par un système de réécriture linéaire convergent. Il s'agit d'une suite exacte de la forme :

dire que c'est une

centrer delta\_0 suite de A-modules à droite

$$\cdots \longrightarrow \mathbb{K}\langle \mathcal{C}_n \rangle \otimes \mathbf{A} \xrightarrow{\delta_n} \mathbb{K}\langle \mathcal{C}_{n-1} \rangle \otimes \mathbf{A} \longrightarrow \cdots \longrightarrow \mathbb{K}\langle \mathcal{C}_0 \rangle \otimes \mathbf{A} \xrightarrow{\delta_0} \mathbf{A} \xrightarrow{\epsilon} \mathbb{K} \longrightarrow 0$$

où  $\mathcal{C}_n$  représente l'ensemble des  $n$ -chaînes,  $\epsilon$  est l'augmentation et les applications  $\delta_n$  sont construites par induction sur  $n$ . Nous étudierons ensuite la forme des applications de bord dans la résolution d'Anick dans les cas des algèbres monomiales.

ce n'est pas un point de vue, mais des résultats

Dans le troisième chapitre, nous exposerons le point de vue de Berger ([4], [5], [6]). Plutôt que de considérer des règles de réduction, on considère des opérateurs de réduction, qui correspondent à des projections sur l'espace des termes réduits. Berger adopte ainsi un point de vue proche des algèbres. Nous introduirons également la notion de confluence à la Berger. On peut mettre une structure de treillis sur l'ensemble des opérateurs de réduction, en étudiant leurs noyaux. Il n'est pas toutefois possible de retrouver cette structure de treillis sur l'ensemble des espace des termes réduits. La confluence des opérateurs permet de mesurer l'écart de l'ensemble des espace des termes réduits à la structure de treillis des opérateurs de réduction. Nous montrerons que la confluence des opérateurs correspond à la confluence au sens des systèmes de réécriture linéaires.

Nous étudierons plus particulièrement le cas des algèbres quadratiques. Dans le cadre des algèbres quadratiques, il est possible de définir la notion de base  $X$ -canonique. Une base  $X$ -canonique est un ensemble de monômes qui sont réduits par des opérateurs de réduction. Elle forme une base de l'algèbre considérée à condition d'avoir la confluence des opérateurs. Ces notions sont introduites par Berger dans [4].

Nous introduirons la notion de koszulité et la notion de  $s$ -koszulité dans le quatrième chapitre. La koszulité est une propriété des algèbres. La koszulité d'une algèbre  $\mathbf{A}$  correspond à une information sur l'homologie du complexe  $P_\bullet \otimes_{\mathbf{A}} \mathbb{K}$  pour toute résolution projective du corps  $\mathbb{K}$  comme  $\mathbf{A}$ -module. L'algèbre  $\mathbf{A}$  est de type koszul si ces groupes d'homologie sont diagonaux, c'est-à-dire que le  $n$ -ième groupe d'homologie est concentré en degré  $n$ . La notion de  $s$ -koszulité est une généralisation de la notion de koszulité. Nous n'adopterons pas dans ce chapitre la définition originale. On pourra toutefois se référer à [14] pour d'autres définitions équivalentes de la koszulité.

Dans le cinquième chapitre, nous appliquerons cela au cas des algèbres quadratiques. Dans ce cadre, nous pourrions définir la notion de base de Poincaré-Birkhoff-Witt. La base de Poincaré-Birkhoff-Witt d'une algèbre présentée par un système de réécriture linéaire  $(X, R)$  correspond à l'ensemble des formes normales du système de réécriture  $(X, R)$ . Grâce au travail préliminaire, nous serons capable de démontrer le théorème suivant :

**Théorème 0.0.1.** Soit  $\mathbf{A}(X, R)$  une algèbre présentée par un système de réécriture  $(X, R)$ . On pose  $V$  l'espace vectoriel  $\mathbb{K}X$  et  $E$  l'espace vectoriel  $\mathbb{K}R$ . Les quatre propriétés suivantes sont équivalentes :

C'est quoi  $KX$  et  $KR$  ?

ne pas numéroter ce théorème

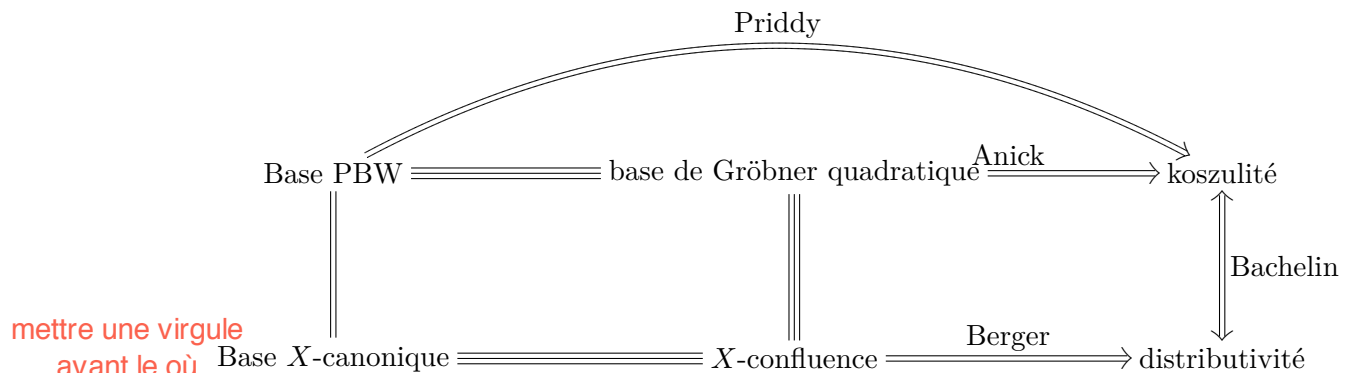


Ce n'est pas le système de réécriture qui admet une base de Gröbner, mais l'idéal des relations

1. Le système de réécriture  $(X, R)$  admet une base de Gröbner quadratique.
2. Les opérateurs  $S_1 = S \otimes id_V$  et  $S_2 = id_V \otimes S$  où l'opérateur  $S$  est défini par  $\ker(S) = E$  sont  $X$ -confluents.
3. L'algèbre  $\mathbf{A}$  admet une base  $X$ -canonique.
4. L'algèbre  $\mathbf{A}$  admet une base de Poincaré-Birkhoff-Witt.

Si ces propriétés sont vérifiées, alors la base  $X$ -canonique et la base de Poincaré-Birkhoff-Witt sont identiques et de plus l'algèbre  $\mathbf{A}$  est Koszul.

Une des conséquences de ce théorème est que les algèbres monomiales quadratiques sont Koszul. Ce théorème peut être résumé dans le diagramme suivant



mettre une virgule  
avant le où  
et  
supprimer le  
deuxième ou

dire ce que représentent  
les opérations + et cap

En effet, une base de Gröbner de l'idéal engendré par  $R$  est obtenue comme l'ensemble des termes  $f - \bar{f}$  où  $f$  n'est pas en forme normale et où  $\bar{f}$  est la décomposition de  $f$  dans la base de  $PBW$ . La base de Poincaré-Birkhoff-Witt et la base  $X$ -canonique coïncident. Pour finir, considérer la  $X$ -confluence des opérateurs de réduction  $S_1$  et  $S_2$  revient à considérer la confluence des paires de réduction dans le système de réécriture  $(X, R)$ .

La distributivité est une propriété de l'algèbre et correspond à la distributivité des opérations  $+$  et  $\cap$  l'une sur l'autre. Backelin a montré dans [8] que cette propriété était équivalente à la Koszulité dans le cas des algèbres quadratiques. Pour montrer cela, on utilise le complexe de Koszul. L'exactitude du complexe de Koszul correspond à la Koszulité de l'algèbre. Les relations à satisfaire pour montrer la distributivité apparaissent clairement dans le calcul de l'exactitude du complexe de Koszul. C'est la distributivité qui fait le lien entre la confluence définie par Berger et la Koszulité.

propriété de

ce n'est pas un propos

dire ce qu'est une algèbre s-homogène

Nous ouvrirons ce propos aux algèbres  $s$ -homogènes dans le sixième et dernier chapitre. Nous tâcherons d'appliquer les approches par Anick et par Berger au cas des algèbres  $s$ -homogènes. En particulier, la seule distributivité ne suffit plus et Berger introduit dans [6] une condition supplémentaire pour obtenir la Koszulité des algèbres considérées. Nous étudierons le cas des algèbres monomiales  $s$ -homogènes, ainsi que le cas des algèbres convergentes  $s$ -homogènes en utilisant la résolution d'Anick. Nous serons alors en mesure pour les algèbres monomiales  $s$ -homogènes et pour les algèbres convergentes  $s$ -homogènes de formuler un critère qui correspond au critère introduit par Berger. Ce critère de Koszulité repose sur la longueur des  $n$ -chaînes.

D'autres travaux très récents ont été publiés sur le sujet, comme par exemple les travaux de Green et Marcos [10], qui étudient la Koszulité des algèbres  $\mathbf{A}(X, R)$  où l'ensemble  $R$  est pur en degré 2 et  $d$ .

dire ce que veut dire pur en degré 2 et d



# Chapitre 1

## Systèmes de réécriture

Ce chapitre est constitué de rappels pour le lecteur qui ne connaît pas la réécriture.

Nous commencerons par définir les systèmes de réécriture abstraits ainsi que certaines de leurs propriétés (confluence, forme normale etc). Nous établirons également un résultat fondamental : le lemme de Newmann. Puis nous définirons les systèmes de réécriture de mots. Nous appliquerons les résultats établis pour les systèmes de réécriture abstraits aux systèmes de réécriture de mots. Nous montrerons également qu'ils présentent les monoïdes. Ensuite nous définirons les systèmes de réécriture linéaires. Nous introduirons la notion d'ordre monomial. Nous appliquerons également les résultats établis pour les systèmes de réécriture abstraits aux systèmes de réécriture linéaires. Nous montrerons que les systèmes de réécriture linéaires présentent les algèbres. Enfin, nous définirons les bases de Gröbner et nous donnerons l'algorithme de Buchberger qui permet de les calculer.

### 1.1 Système de réécriture abstrait

#### 1.1.1 Définition générale

On définit un *système de réécriture abstrait* comme étant la donnée d'un ensemble  $\mathcal{V}$  et d'une relation binaire  $\rightarrow$  sur  $\mathcal{V}$ . Étant donnés deux éléments  $a$  et  $b$  de  $\mathcal{V}$ ,  $a \rightarrow b$  se lit «  $a$  se réduit (ou se réécrit) en  $b$  ». À une telle relation  $\rightarrow$ , on peut associer sa clôture réflexive et transitive  $\rightarrow^*$ . C'est la plus petite relation telle que pour tous éléments  $a, b$  et  $c$  de  $\mathcal{V}$ , les conditions suivantes soient vérifiées :

1. si  $a \rightarrow b$ , alors  $a \rightarrow^* b$ ,
2.  $a \rightarrow^* a$ ,
3. si  $a \rightarrow^* b$  et  $b \rightarrow^* c$ , alors  $a \rightarrow^* c$ .

On note  $\equiv$  la clôture réflexive, transitive et symétrique de la relation  $\rightarrow$ . Il s'agit d'une relation d'équivalence.

#### 1.1.2 Forme normale

On dit qu'un élément  $a$  de  $\mathcal{V}$  est en *forme normale*, s'il n'existe pas d'élément  $b$  de  $\mathcal{V}$  tel que  $a \rightarrow b$ .

Un système de réécriture  $(\mathcal{V}, \rightarrow)$  est dit *normalisant*, si chacun de ses éléments a au moins une forme normale. C'est-à-dire que pour un élément  $a$  de  $\mathcal{V}$ , il existe un élément  $b$  de  $\mathcal{V}$  tel que  $b$  soit en forme normale et  $a \rightarrow^* b$ .



Un système de réécriture  $(\mathcal{V}, \rightarrow)$  est dit *fortement normalisant ou terminant*, s'il n'existe pas de suite infinie de réduction

$$a_1 \rightarrow a_2 \rightarrow \dots \rightarrow a_n \rightarrow a_{n+1} \rightarrow \dots$$

**Exemple 1.1.1.** Considérons le système de réécriture  $(\mathcal{V}, \rightarrow)$  avec  $\mathcal{V} = \{x, y\}$  et les deux relations  $x \rightarrow y$  et  $y \rightarrow x$ . Il n'existe pas de forme normale dans ce système.

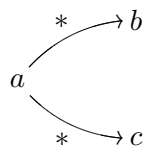
Considérons maintenant le système de réécriture  $(\mathcal{V}, \rightarrow)$  avec  $\mathcal{V} = \{x, y, z\}$  et les trois relations  $x \rightarrow y$ ,  $y \rightarrow x$  et  $x \rightarrow z$ . Seul l'élément  $z$  est en forme normale. Ce système est normalisant, mais il n'est pas terminant.

Considérons ensuite le système de réécriture  $(\mathcal{V}, \rightarrow)$  avec  $\mathcal{V} = \{x, y, z\}$  et les deux relations  $y \rightarrow x$  et  $x \rightarrow z$ . Seul l'élément  $z$  est en forme normale. Ce système est normalisant et terminant.

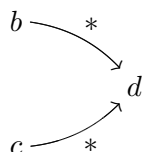
Considérons enfin le système de réécriture  $(\mathcal{V}, \rightarrow)$  avec  $\mathcal{V} = \{x, y, z\}$  et les deux relations  $x \rightarrow y$  et  $x \rightarrow z$ . Les deux éléments  $y$  et  $z$  sont en forme normale. Ce système est normalisant et terminant.

### 1.1.3 Confluence

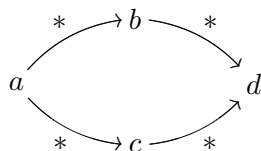
Un système de réécriture abstrait  $(\mathcal{V}, \rightarrow)$  est dit *confluent* s'il vérifie la propriété suivante : étant donnés trois éléments  $a, b$  et  $c$  de  $\mathcal{V}$  tels que



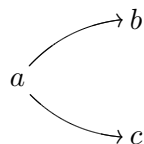
il existe un élément  $d$  de  $\mathcal{V}$  tel que



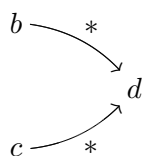
On obtient ainsi le diagramme de confluence :



On introduit également une autre notion de confluence. Un système de réécriture abstrait  $(\mathcal{V}, \rightarrow)$  est dit *localement confluent*, s'il vérifie la propriété suivante : étant donnés trois éléments  $a, b$  et  $c$  de  $\mathcal{V}$  tels que

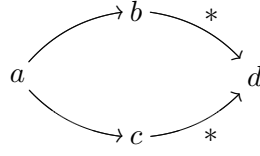


il existe un élément  $d$  de  $\mathcal{V}$  tel que





On obtient ainsi le diagramme de confluence :



La confluence est une propriété globale alors que la confluence locale est une propriété locale.

**Exemple 1.1.2.** On reprend les exemples précédents. Considérons le système de réécriture  $(\mathcal{V}, \rightarrow)$  avec  $\mathcal{V} = \{x, y\}$  et les deux relations  $x \rightarrow y$  et  $y \rightarrow x$ . Ce système est confluent et localement confluent.

Considérons maintenant le système de réécriture  $(\mathcal{V}, \rightarrow)$  avec  $\mathcal{V} = \{x, y, z\}$  et les trois relations  $x \rightarrow y$ ,  $y \rightarrow x$  et  $x \rightarrow z$ . Ce système est confluent et localement confluent.

Considérons ensuite le système de réécriture  $(\mathcal{V}, \rightarrow)$  avec  $\mathcal{V} = \{x, y, z\}$  et les deux relations  $y \rightarrow x$  et  $x \rightarrow z$ . Ce système est confluent et localement confluent.

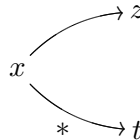
Considérons enfin le système de réécriture  $(\mathcal{V}, \rightarrow)$  avec  $\mathcal{V} = \{x, y, z\}$  et les deux relations  $x \rightarrow y$  et  $x \rightarrow z$ . Ce système n'est pas confluent, ni localement confluent.

Nous allons relier ces deux notions de confluence. Toutefois, ces deux propriétés ne sont pas équivalentes, ce que nous allons montrer par un contre-exemple.

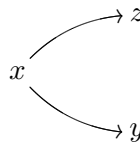
**Remarque 1.1.1.** Il apparait immédiatement par les définitions que nous avons données qu'un système de réécriture abstrait confluent est localement confluent.

La réciproque de cette remarque est fausse en général, ainsi que nous le montre le contre-exemple suivant.

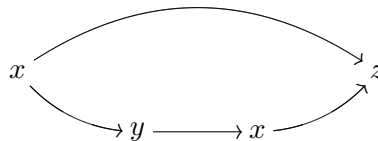
**Exemple 1.1.3.** Considérons le système de réécriture  $(\mathcal{V}, \rightarrow)$  avec  $\mathcal{V} = \{x, y, z, t\}$  et les quatre relations  $x \rightarrow y$ ,  $y \rightarrow x$ ,  $x \rightarrow z$  et  $y \rightarrow t$ . Ce système est non confluent mais localement confluent. Ce système de réécriture n'est pas confluent. En effet, considérons



Il n'existe aucune réduction à partir de  $z$ , ni de  $t$ . On ne peut donc pas obtenir de diagramme de confluence à partir de ces deux réductions. Par contre, ce système est bien localement confluent. Il faut vérifier pour toutes les paires de réductions qu'on peut construire un diagramme de confluence. Par exemple, on doit considérer :



On obtient le diagramme de confluence :



Ce système de réécriture abstrait est donc localement confluent, mais non confluent.



Newman a toutefois établi le lemme suivant dans [16].

**Lemme 1.1.1. (Newman)** Soit un système de réécriture abstrait terminant  $(\mathcal{V}, \rightarrow)$ . Les deux conditions suivantes sont équivalentes :

1. le système de réécriture  $(\mathcal{V}, \rightarrow)$  est confluent,
2. le système de réécriture  $(\mathcal{V}, \rightarrow)$  est localement confluent.

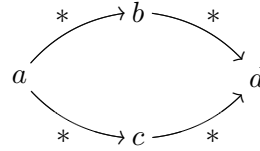
*Démonstration.* Le sens direct correspond à la remarque précédente.

Réciproquement, on considère un système de réécriture abstrait  $(\mathcal{V}, \rightarrow)$  localement confluent. On se donne trois éléments  $a, b$  et  $c$  de  $\mathcal{V}$  tels que  $b \xleftarrow{*} a \xrightarrow{*} c$ . Comme le système de réécriture est terminant, cela signifie qu'il existe deux suites finies de réductions :

$$a = b_0 \rightarrow b_1 \rightarrow \dots \rightarrow b_i = b \text{ et}$$

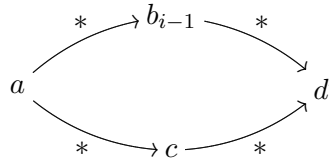
$$a = c_0 \rightarrow c_1 \rightarrow \dots \rightarrow c_j = c.$$

Nous allons montrer par induction sur  $i + j$  qu'il existe un diagramme de confluence



Si  $i + j = 0$ , alors  $a = b = c$ , il suffit de prendre  $d = a$  et on obtient le diagramme de confluence souhaité.

Sinon, on peut supposer que  $i \geq j$ . Par induction, on a le diagramme de confluence :



Il existe donc une suite finie de réductions

$$b_{i-1} = d_0 \rightarrow d_1 \rightarrow \dots \rightarrow d_k = d'.$$

Par confluence du système de réécriture, on peut alors construire une suite de réductions

$$b_i = e_0 \rightarrow e_1 \rightarrow \dots \rightarrow e_k$$

qui donne le diagramme de confluence :

$$\begin{array}{ccccccc}
 b_{i-1} = d_0 & \longrightarrow & d_1 & \longrightarrow & \dots & \longrightarrow & d_k \\
 \downarrow & & \downarrow & & & & \downarrow \\
 b_i = e_0 & \longrightarrow & e_1 & \longrightarrow & \dots & \longrightarrow & e_k
 \end{array}$$

En prenant  $d = e_k$ , on obtient le diagramme de confluence souhaité. □

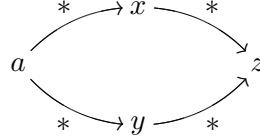
Le lemme de Newman permet de déduire des informations globales du système à partir d'informations locales. La confluence locale est une propriété aisée à vérifier, car elle suppose qu'on ne s'intéresse qu'à une étape de réduction à la fois. La confluence au contraire est une propriété difficile à vérifier car elle suppose qu'on s'intéresse à toutes les réductions possibles, quel que soit le nombre d'étapes.



### 1.1.4 Lien entre forme normale et confluence

**Lemme 1.1.2.** Dans un système de réécriture abstrait confluent, tout élément admet au plus une forme normale.

*Démonstration.* Donnons-nous un système de réécriture abstrait  $(\mathcal{V}, \rightarrow)$  confluent. Supposons que l'élément  $a$  de  $\mathcal{V}$  aient deux formes normales  $x$  et  $y$ . Par la confluence du système de réécriture abstrait, on sait qu'il existe un élément  $z$  de  $\mathcal{V}$  tel que :

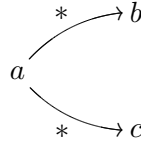


Comme l'élément  $x$  est en forme normale, il n'existe pas d'élément  $t$  de  $\mathcal{V}$  tel que  $x \rightarrow t$ . Comme on doit avoir  $x \xrightarrow{*} z$ , on a alors nécessairement  $z = x$ . De façon similaire,  $z = y$ . Par conséquent  $x = y$ . L'élément  $a$  a donc une unique forme normale.  $\square$

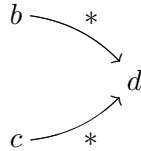
**Lemme 1.1.3.** Soit un système de réécriture abstrait  $(\mathcal{V}, \rightarrow)$ . Le système  $(\mathcal{V}, \rightarrow)$  est confluent et normalisant si, et seulement si, tout élément de  $\mathcal{V}$  a exactement une forme normale.

*Démonstration.* Par définition, un élément d'un système de réécriture abstrait normalisant admet au moins une forme normale. On a montré qu'un élément d'un système de réécriture abstrait confluent admet au plus une forme normale. Ceci prouve l'implication directe.

Montrons la réciproque. Si tout élément a exactement une forme normale, par définition, le système de réécriture abstrait est normalisant. Il reste à montrer que le système est bien confluent. Pour cela, on suppose qu'il existe trois éléments  $a, b, c$  de  $\mathcal{V}$  tels que



mais qu'il n'existe pas d'élément  $d$  de  $\mathcal{V}$  tel que



En particulier les éléments  $b$  et  $c$  n'ont pas la même forme normale. Notons  $\hat{b}$  et  $\hat{c}$  leurs formes normales respectives. On a donc par transitivité  $a \xrightarrow{*} \hat{b}$  et  $a \xrightarrow{*} \hat{c}$ , où  $\hat{b}$  et  $\hat{c}$  sont en forme normale. Cela signifie que l'élément  $a$  a deux formes normales, ce qui est impossible par hypothèse.  $\square$

**Corollaire 1.1.1.** Soit un système de réécriture abstrait  $(\mathcal{V}, \rightarrow)$  confluent et normalisant. Si  $x$  et  $y$  sont deux éléments de  $\mathcal{V}$  tels que  $x \xrightarrow{*} y$ , alors les éléments  $x$  et  $y$  ont même forme normale.

**Corollaire 1.1.2.** Soit un système de réécriture abstrait  $(\mathcal{V}, \rightarrow)$  confluent et normalisant. Deux éléments  $x$  et  $y$  de  $\mathcal{V}$  ont même forme normale si, et seulement si,  $x \equiv y$ .

*Démonstration.* Le sens direct est immédiat.

La réciproque se démontre par récurrence sur le nombre d'étapes de réduction entre les éléments  $x$  et  $y$ .  $\square$



**Lemme 1.1.4.** Soit un système de réécriture abstrait terminant  $(\mathcal{V}, \rightarrow)$ . Ce système est confluent si, et seulement si, tout élément de  $\mathcal{V}$  a exactement une forme normale.

*Démonstration.* Il s'agit d'une conséquence immédiate des lemmes 1.1.1 et 1.1.3 □

## 1.2 Système de réécriture de mots

### 1.2.1 Définitions préliminaires

Étant donné un alphabet  $X = \{x_1, \dots, x_n\}$ , on note  $X^*$  le monoïde libre engendré par  $X$ , il correspond aux mots sur l'alphabet  $X$  avec comme opération la concaténation de mots. L'identité de  $X^*$  est le mot vide noté 1.

**Définition 1.2.1.** Un *système de réécriture de mots* est la donnée d'un alphabet  $X$  et d'un ensemble de relations  $R \subset X^* \times X^*$ .

On peut associer au système de réécriture de mots  $(X, R)$  la relation de réduction  $\Rightarrow_R$  définie de la façon suivante : si  $w$  et  $w'$  sont deux mots dans  $X^*$ , on dit que  $w$  se réduit en  $w'$  par  $R$  s'il existe deux mots  $u$  et  $v$  dans  $X^*$  et  $\alpha = (l, r)$  dans l'ensemble  $R$  tels que :

$$w = ulv, w' = urv$$

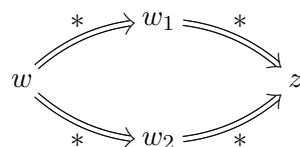
On le note  $ulv \xRightarrow{u\alpha v} urv$ .

Au système de réécriture de mots  $(X, R)$ , on peut associer un système de réécriture abstrait  $(X^*, \Rightarrow_R)$ . Les propriétés sur le système de réécriture de mots  $(X, R)$  s'énoncent sur le système de réécriture abstrait  $(X^*, \Rightarrow_R)$ . On peut donc également définir la clôture réflexive transitive  $\xRightarrow{*}_R$  de la relation de réduction  $\Rightarrow_R$  ainsi que les notions précédemment définies.

**Définition 1.2.2.** Un système de réécriture de mots  $(X, R)$  est dit *réduit* si pour toute relation  $(l, r)$  dans l'ensemble  $R$ , il n'existe pas de relation  $(l', r')$  dans l'ensemble  $R \setminus \{(l, r)\}$  tel que  $l$  s'écrit comme  $ul'v$  et le mot  $r$  est en forme normale pour  $\Rightarrow_R$ .

**Définition 1.2.3.** Un mot  $w$  dans  $X^*$  est en *forme normale*, si on ne peut pas le réduire par la relation  $\Rightarrow_R$ . Autrement dit, pour chacun de ses sous-mots  $w'$ , il n'existe pas de mot  $w''$  dans  $X^*$  tel que la paire  $(w', w'')$  soit dans l'ensemble des relations  $R$ .

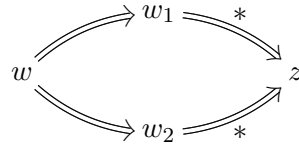
**Définition 1.2.4.** Un système de réécriture de mots  $(X, R)$  est *confluent*, si le système de réécriture abstrait  $(X^*, \Rightarrow_R)$  est confluent. C'est-à-dire que pour tout mot  $w$  de  $X^*$  qui se réécrit par la relation de réduction  $\xRightarrow{*}_R$  en les mots  $w_1$  et  $w_2$ , il existe un mot  $z$ , tel que les mots  $w_1$  et  $w_2$  se réécrivent par la relation de réduction  $\xRightarrow{*}_R$  en le mot  $z$ . On a le diagramme de confluence :



**Définition 1.2.5.** Un système de réécriture de mots  $(X, R)$  est *localement confluent*, si le système de réécriture abstrait  $(X^*, \Rightarrow_R)$  est localement confluent. C'est-à-dire que pour tout mot  $w$  de  $X^*$  qui se réécrit par la relation de réduction  $\Rightarrow_R$  en les mots  $w_1$  et  $w_2$ , il existe un



mot  $z$ , tel que les mots  $w_1$  et  $w_2$  se réécrivent par la relation de réduction  $\xRightarrow{*}_R$  en le mot  $z$ . On a le diagramme de confluence :



**Définition 1.2.6.** Un système de réécriture de mots  $(X, R)$  est *terminant* si le système de réécriture abstrait  $(X^*, \xRightarrow{*}_R)$  est terminant. On dit qu'un système de réécriture de mots est *convergent* s'il est à la fois terminant et confluent.

### 1.2.2 Paires de réduction

Soit  $(X, R)$  un système de réécriture de mots.

**Définition 1.2.7.** Une *paire de réduction* est la donnée de deux réductions  $x \xRightarrow{\alpha_1} y$  et  $x \xRightarrow{\alpha_2} z$  où  $x, y$  et  $z$  sont des mots sur l'alphabet  $X$ . On la note  $(\alpha_1, \alpha_2)$  et on appelle le mot  $x$  *source* de la paire  $(\alpha_1, \alpha_2)$ . On confond les paires de réduction  $(\alpha_1, \alpha_2)$  et  $(\alpha_2, \alpha_1)$ .

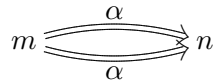
**Définition 1.2.8.** On dit qu'une telle paire de réduction est *confluente*, s'il existe un mot  $t$  tel que  $y \xRightarrow{*}_R t$  et  $z \xRightarrow{*}_R t$ .

Par définition, le système de réécriture de mot  $(X, R)$  est localement confluent si, et seulement si, toutes les paires de réductions sont confluentes pour la relation  $\xRightarrow{*}_R$ .

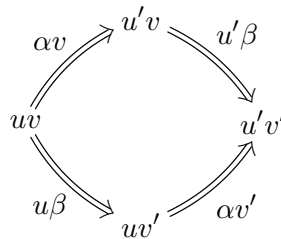
### 1.2.3 Types de paires de réduction

On considère un système de réécriture de mots  $(X, R)$ . Il existe plusieurs types de paires de réduction :

1. Cas *asphérique* : elles sont de la forme  $(m \xRightarrow{\alpha} n, m \xRightarrow{\alpha} n)$ . Une telle paire est bien entendu confluente :



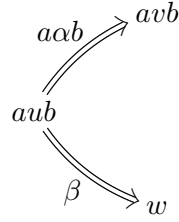
2. *Paire de Peiffer* : une paire de Peiffer est de la forme  $(uv \xRightarrow{\alpha v} u'v, uv \xRightarrow{u\beta} uv')$  où  $u \xRightarrow{\alpha} u'$  et  $v \xRightarrow{\beta} v'$ . Une telle paire est bien entendu confluente :



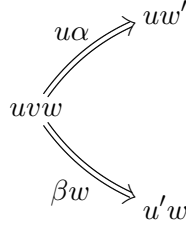
3. *Branchement de superposition* : les branchements de superposition sont les autres paires de réduction.



Les branchements de superposition sont de deux formes :



où  $u \xRightarrow{\alpha} v$ , et



où  $vw \xRightarrow{\alpha} w'$  et  $uv \xRightarrow{\beta} u'$ .

On peut définir un ordre partiel sur les paires de réduction, qu'on note  $\preceq$ . Pour toutes les paires de réduction  $(\alpha, \beta)$ , on a :

$$(\alpha, \beta) \preceq (w_1\alpha w_2, w_1\beta w_2)$$

où  $w_1$  et  $w_2$  sont deux mots de  $X^*$ .

On appelle *paire critique* un branchement de superposition minimal pour l'ordre  $\preceq$ .

**Lemme 1.2.1.** Dans un système de réécriture de mots, toutes les paires de réduction sont confluentes si, et seulement si, toutes les paires critiques sont confluentes.

*Démonstration.* Ce lemme est une conséquence directe de l'énumération faite précédemment des différents types de paires de réduction qui existent. Tout d'abord, l'implication indirecte est immédiate.

Montrons l'implication directe. On a vu que les paires de réduction sont confluentes dans le cas asphérique et dans le cas Peiffer. Il reste donc à montrer que les branchements de superposition sont confluentes. Dans le cadre d'un système de réécriture de mots, les seuls branchements de superposition qui existent sont les paires critiques et les paires critiques dans un contexte. De plus, si les paires critiques sont confluentes, alors les paires critiques dans un contexte sont confluentes. Ceci démontre l'équivalence.  $\square$

**Corollaire 1.2.1.** Un système de réécriture de mots terminant est confluent si, et seulement si, toutes les paires critiques sont convergentes.

#### 1.2.4 Présentation de monoïdes

Soit un système de réécriture de mots  $(X, R)$ . On note  $\equiv_R$  la clôture transitive, réflexive et symétrique de la relation de réécriture  $\xRightarrow{R}$ . On peut alors définir le monoïde quotient

$$\mathbf{M} = X^* / \equiv_R .$$

On dit que le système de réécriture de mots  $(X, R)$  présente le monoïde  $\mathbf{M}$ .



Réciproquement, on peut associer à tout monoïde une telle présentation et donc lui associer un système de réécriture. Soit  $\mathbf{M}$  un monoïde. On définit  $X$  comme l'ensemble des éléments du monoïde  $\mathbf{M}$ . On pose

$$R' = \{u.v = uv \mid u, v \in \mathbf{M}\}.$$

On peut ensuite orienter les relations dans  $R'$  :

$$R = \{(u.v, uv) \mid u, v \in \mathbf{M}\}.$$

On a défini un système de réécriture de mots  $(X, R)$  qui présente le monoïde  $\mathbf{M}$ . On l'appelle présentation standard du monoïde  $\mathbf{M}$ .

On renvoie à [13] pour plus de détails.

**Définition 1.2.9.** On dit que deux systèmes de réécriture de mots sont équivalents s'ils présentent le même monoïde.

**Proposition 1.2.1.** Tout système de réécriture de mots convergent est équivalent à un système de réécriture de mots convergent réduit.

## 1.3 Système de réécriture linéaire

### 1.3.1 Remarques générales sur les algèbres

Rappelons quelques définitions. On renvoie vers [15].

**Définition 1.3.1.** Une algèbre  $\mathbf{A}$  est un  $\mathbb{K}$ -module  $\mathbf{A}$  muni de deux morphismes de  $\mathbb{K}$ -modules

$$m : \mathbf{A} \otimes \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{A} \quad \text{et} \quad e : \mathbb{K} \rightarrow \mathbf{A}$$

tel que les deux diagrammes suivants soient commutatifs :

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{A} \otimes \mathbf{A} \otimes \mathbf{A} & \xrightarrow{1 \otimes m} & \mathbf{A} \otimes \mathbf{A} \\ m \otimes 1 \downarrow & & \downarrow m \\ \mathbf{A} \otimes \mathbf{A} & \xrightarrow{m} & \mathbf{A} \end{array}$$

et :

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{K} \otimes \mathbf{A} & \xrightarrow{\sim} & \mathbf{A} & \xrightarrow{\sim} & \mathbf{A} \otimes \mathbb{K} \\ e \otimes 1 \downarrow & & \parallel & & \downarrow 1 \otimes e \\ \mathbf{A} \otimes \mathbf{A} & \xrightarrow{m} & \mathbf{A} & \xleftarrow{m} & \mathbf{A} \otimes \mathbf{A} \end{array}$$

où 1 est l'unité. Le premier diagramme est le diagramme d'associativité et le second est le diagramme d'unité.

En notant  $xy = m(x \otimes y)$  pour tous les éléments  $x$  et  $y$  de l'algèbre  $\mathbf{A}$ , l'associativité s'écrit :

$$x(yz) = (xy)z$$

pour tous éléments  $x, y$  et  $z$  de l'algèbre  $\mathbf{A}$ . De même, l'unité s'écrit :

$$1x = x1 = x$$

pour tout élément  $x$  de l'algèbre  $\mathbf{A}$ .



**Définition 1.3.2.** Soit  $X$  un ensemble. On définit l'*algèbre libre* sur  $X$ , notée  $\mathbb{K}\langle X \rangle$ , comme étant l'algèbre qui vérifie la propriété universelle suivante. Il existe une application  $\iota : X \rightarrow \mathbb{K}\langle X \rangle$  telle que, pour toute algèbre  $\mathbf{A}$ , toute application  $X \rightarrow \mathbf{A}$  peut être factorisée d'une unique façon :

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\quad} & \mathbf{A} \\ \downarrow \iota & \nearrow & \\ \mathbb{K}\langle X \rangle & & \end{array}$$

On peut expliciter la définition d'algèbre libre à  $n$  générateurs  $x_1, \dots, x_n$ , notée  $\mathbb{K}\langle x_1, \dots, x_n \rangle$ , comme étant la plus petite algèbre au sens de l'inclusion telle que :

- les éléments  $x_1, \dots, x_n$  sont dans l'algèbre  $\mathbb{K}\langle x_1, \dots, x_n \rangle$ .
- Toute combinaison linéaire d'éléments dans  $\mathbb{K}\langle x_1, \dots, x_n \rangle$  est dans l'algèbre  $\mathbb{K}\langle x_1, \dots, x_n \rangle$ .
- Tout produit d'éléments dans  $\mathbb{K}\langle x_1, \dots, x_n \rangle$  est dans l'algèbre  $\mathbb{K}\langle x_1, \dots, x_n \rangle$ .

Pour un espace vectoriel  $V$ , on note  $T(V)$  l'algèbre tensorielle engendrée par  $V$  :

$$T(V) = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} V^{\otimes n}$$

On peut voir l'algèbre libre engendrée par un alphabet  $X$  comme l'espace vectoriel de base les monômes du monoïde libre  $X^*$ .

$$\mathbb{K}\langle X \rangle \simeq T(\mathbb{K}X) \simeq \mathbb{K}X^* \simeq \bigoplus_{w \in X^*} \mathbb{K}w$$

où  $\mathbb{K}X^*$  désigne l'espace vectoriel engendré par le monoïde  $X^*$ .

### 1.3.2 Ordres monomiaux

**Définition 1.3.3.** Un ordre monomial est un bon ordre  $<$  sur  $X^*$  compatible avec le produit associatif. Il vérifie donc les deux propriétés suivantes.

1. Il n'existe pas de séquence infinie strictement décroissante.
2. Soient  $m_1$  et  $m_2$  deux monômes de  $X^*$  tels que  $m_1 < m_2$ , alors pour tous monômes  $m$  et  $n$  de  $X^*$ , on a  $mm_1n < mm_2n$ .

Nous allons définir deux ordres monomiaux. Donnons nous un alphabet totalement ordonné :

$$X = \{x_1 < x_2 < \dots < x_n\}$$

On définit l'*ordre lexicographique*  $<_{lex}$  comme étant l'ordre défini sur les monômes :

$$x_{i_1} \dots x_{i_a} <_{lex} x_{j_1} \dots x_{j_b} \text{ si et seulement si } \begin{cases} x_{i_1} < x_{j_1} \\ \text{ou } x_{i_1} = x_{j_1} \text{ et } x_{i_2} \dots x_{i_a} <_{lex} x_{j_2} \dots x_{j_b} \end{cases}$$

et pour tout monômes  $m$ ,  $1 <_{lex} m$ .

On définit l'*ordre deglex*  $<_{deglex}$  comme étant l'ordre sur les monômes :

$$x_{i_1} \dots x_{i_a} <_{deglex} x_{j_1} \dots x_{j_b} \text{ si et seulement si } \begin{cases} a < b \\ \text{ou } a = b \text{ et } x_{i_1} \dots x_{i_a} <_{lex} x_{j_1} \dots x_{j_b} \end{cases}$$

**Remarque 1.3.1.** Il apparait immédiatement que ces deux ordres monomiaux correspondent sur les monômes de même longueur : pour tous les monômes  $m_1$  et  $m_2$  de même longueur,

$$m_1 <_{lex} m_2 \quad \text{si, et seulement si,} \quad m_1 <_{deglex} m_2.$$



**Exemple 1.3.1.** Illustrons les similitudes et différences de ces deux ordres monomiaux sur un exemple. Donnons-nous un alphabet totalement ordonné  $X = \{x < y\}$ , nous allons ordonner les monômes de longueur inférieure ou égale à 3 sur cet alphabet. Avec l'ordre lexicographique, on obtient :

$$1 < x < xx < xxx < xxy < xy < yxy < xyy < y < yx < yxx < yxy < yy < yyx < yyy$$

Avec l'ordre deglex, on obtient :

$$1 < x < y < xx < xy < yx < yy < xxx < xxy < xyx < xyy < yxx < yxy < yyx < yyy$$

**Définition 1.3.4.** Considérons un élément  $w$  de l'algèbre  $\mathbb{K}\langle X \rangle$ . Il peut s'écrire comme une combinaison linéaire de monômes :

$$w = \sum_{i \in I} \lambda_i m_i$$

où  $I$  est un ensemble d'indices et pour tout  $i \in I$ ,  $m_i$  est un monôme dans  $X^*$  et  $\lambda_i$  est un scalaire non nul. Soit  $<$  un ordre monomial. Le *monôme dominant* du terme  $w$  pour l'ordre  $<$  est  $\lambda_j m_j$  tel que, pour tout indice  $i \in I$  et  $i \neq j$ ,  $m_i < m_j$ . On le note  $LT(w)$ . On note également  $H(w) = m_j$  et  $HC(w) = \lambda_j$ , de sorte que le monôme dominant s'écrit

$$LT(w) = HC(w)H(w).$$

On définit également le *reste*

$$R(w) = w - LT(w).$$

On peut également étendre un ordre monomial en un ordre partiel sur l'ensemble des termes  $\mathbb{K}\langle X \rangle$ .

Soit  $X$  un alphabet. Soit  $<$  un ordre monomial sur  $X^*$ . Soient  $f$  et  $g$  deux éléments non nuls de  $\mathbb{K}\langle X \rangle$ . On étend l'ordre  $<$  sur l'algèbre  $\mathbb{K}\langle X \rangle$  par

$$f > g \text{ si } H(f) > H(g) \text{ ou } (H(f) = H(g) \text{ et } R(f) > R(g))$$

**Proposition 1.3.1.** L'ordre monomial sur  $X^*$  étendu sur l'algèbre libre  $\mathbb{K}\langle X \rangle$  est un ordre bien-fondé.

### 1.3.3 Systèmes de réécriture linéaire

On a besoin d'étendre les systèmes de réécriture de mots à des combinaisons linéaires de la forme  $\sum \alpha_i m_i$  où les coefficients  $\alpha_i$  sont dans le corps  $\mathbb{K}$  et les  $m_i$  sont des monômes.

**Définition 1.3.5.** Un *système de réécriture linéaire* est la donnée d'un alphabet  $X$  et d'un ensemble de relations  $R$  inclus dans  $\mathbb{K}\langle X \rangle \times \mathbb{K}\langle X \rangle$ . On lui associe la relation de réécriture  $\Longrightarrow_R$  définie de la façon suivante : étant donnés deux éléments  $w$  et  $w'$  dans  $\mathbb{K}\langle X \rangle$ , on dit que l'élément  $w$  se réduit en l'élément  $w'$  et on le note  $w \Longrightarrow_R w'$  s'il existe une décomposition de  $w$  et une décomposition de  $w'$  :

$$w = \lambda m f n + g \text{ et } w' = \lambda m f' n + g$$

où  $m$  et  $n$  sont deux monômes dans  $X^*$ , où  $\lambda$  est un scalaire et où  $f, f'$  et  $g$  sont des éléments de  $\mathbb{K}\langle X \rangle$  tels que  $(f, f')$  soit dans l'ensemble des relations  $R$ . On le note  $w \xrightarrow{m\alpha n+g} w'$  où  $\alpha = (f, f')$ .

Au système de réécriture linéaire  $(X, R)$ , on associe le système de réécriture abstrait  $(\mathbb{K}\langle X \rangle, \Longrightarrow_R)$ .



**Définition 1.3.6.** Un *système de réécriture linéaire monomial*  $(X, R)$  est un système de réécriture linéaire qui vérifie la condition supplémentaire suivante :

$$R \text{ est un sous-ensemble de } X^* \times \mathbb{K}\langle X \rangle.$$

**Remarque 1.3.2.** La définition de système de réécriture linéaire monomial pose problème a priori. On considère le système de réécriture linéaire monomial  $(X, R)$ . Prenons une règle de réduction entre deux monômes  $m$  et  $m' : m \xrightarrow{\alpha} m'$ , on peut alors l'appliquer avec le contexte " $(m + m') - .$ ". On obtient alors  $m' \Rightarrow m$ . Ce qui empêche le système de réécriture abstrait  $(\mathbb{K}\langle X \rangle, \Rightarrow_R)$  d'être terminant.

**Définition 1.3.7.** Un *système de réécriture linéaire monomial compatible avec un ordre monomial*  $<$  est un système de réécriture linéaire monomial  $(X, R)$  qui vérifie la condition supplémentaire suivante : soit  $m$  un monôme de  $X^*$  et soit  $f$  un élément de  $\mathbb{K}\langle X \rangle$  tel que, pour toute relation  $(m, f)$  dans  $R$ ,  $m > lt(f)$ .

**Remarque 1.3.3.** Nous avons montré qu'un système de réécriture linéaire monomial n'est pas nécessairement terminant. Au contraire, un système de réécriture  $(X, R)$  linéaire monomial compatible avec un ordre monomial  $<$  est forcément terminant. En effet, on peut étendre l'ordre monomial  $<$  en un ordre partiel bien fondé sur l'algèbre libre  $\mathbb{K}\langle X \rangle$ . Par définition d'un ordre bien-fondé, il n'existe pas de suite infinie décroissante d'éléments de l'algèbre  $\mathbb{K}\langle X \rangle$ . Cela correspond à la terminaison du système de réécriture abstrait  $(\mathbb{K}\langle X \rangle, \Rightarrow_R)$ .

**Définition 1.3.8.** Un système de réécriture linéaire monomial  $(X, R)$  est dit *réduit* si pour toute relation  $(l, r)$  dans l'ensemble  $R$ , il n'existe pas de relation  $(l', r')$  dans l'ensemble  $R \setminus \{(l, r)\}$  tel que  $l$  s'écrit comme  $ul'v$  et le mot  $r$  est en forme normale pour  $\Rightarrow_R$ .

On peut distinguer les différentes paires de réduction qui existent dans un système de réécriture linéaire monomial compatible avec un ordre monomial : on définit de même que dans le cas des systèmes de réécriture de mots : cas asphérique, paire de Peiffer. Il faut toutefois ajouter les paires des Peiffer additives qui sont de la forme :

$$\begin{array}{ccc} & \alpha + g & \nearrow f' + g \\ & f + g & \\ & f + \beta & \searrow f + g' \end{array}$$

où  $f \xrightarrow{\alpha} f'$  et  $g \xrightarrow{\beta} g'$ . Les paires de Peiffer additives sont confluentes :

$$\begin{array}{ccccc} & \alpha + g & \nearrow f' + g & & f' + \beta \\ & f + g & & & \\ & f + \beta & \searrow f + g' & & \alpha + g' \\ & & f + g' & \nearrow f' + g' & \end{array}$$

De même que dans le cas des systèmes de réécriture de mots, les branchements de superposition sont les autres paires de réduction. On définit également de façon similaire la notion de paire critique.



On peut reprendre les notions de confluence et de confluence locale définies précédemment dans le cadre des systèmes de réécriture monomiaux linéaires compatibles avec un ordre monomial. Les propriétés vues précédemment restent valables. Un système de réécriture monomial linéaire compatible avec un ordre monomial est toujours terminant, donc pour avoir la confluence d'un tel système de réécriture, il faut et il suffit d'avoir la confluence locale par le lemme de Newmann. Il suffit donc d'étudier la confluence des paires critiques pour avoir la confluence d'un système de réécriture monomial linéaire compatible avec un ordre monomial.

**Lemme 1.3.1. (lemme du Diamant)** Soit  $(X, R)$  un système de réécriture monomial linéaire compatible avec un ordre monomial. Les trois propriétés suivantes sont équivalentes :

1. le système de réécriture  $(X, R)$  est confluent.
2. les paires critiques du système de réécriture  $(X, R)$  sont confluentes.
3. tous les mots de l'algèbre  $\mathbb{K}\langle X \rangle$  ont une unique forme normale.

*Démonstration.* Le lemme de Newmann donne l'équivalence entre les deux premiers points.

On a montré qu'un système de réécriture abstrait est confluent si, et seulement si, chacun de ses éléments a une unique forme normale. Ceci montre l'équivalence entre le premier point et le troisième point.  $\square$

On appellera désormais système de réécriture linéaire un système de réécriture monomial linéaire compatible avec un ordre monomial sauf mention explicite du contraire.

### 1.3.4 Présentation d'algèbres

Soit  $X$  un ensemble totalement ordonné. Soit  $R'$  un sous-ensemble de  $\mathbb{K}\langle X \rangle$ . On dit qu'une algèbre  $\mathbf{A}$  est présentée par générateurs  $X$  et relations  $R'$  si

$$\mathbf{A} = \mathbb{K}\langle X \rangle / I(R'),$$

où  $I(R')$  désigne l'idéal de  $\mathbb{K}\langle X \rangle$  engendré par  $R'$ . On note  $\mathbf{A} = \langle X, R' \rangle$ .

Soit  $<$  un ordre monomial sur  $X^*$ . Toute relation  $f$  dans  $R'$  peut également s'écrire de la forme  $(m, r)$  où  $m$  est dans  $X^*$  et tel que  $m > H(r)$ . En effet, il suffit de poser

$$m = H(f) \quad \text{et} \quad r = \frac{1}{HC(f)} R(f).$$

On appelle  $R$  l'ensemble des couples obtenus ainsi. Par conséquent, à une algèbre  $\mathbf{A}$  présentée par générateurs  $X$  et relations  $R'$ , on peut associer un système de réécriture linéaire  $(X, R)$ . On dit que le système de réécriture linéaire  $(X, R)$  *présente l'algèbre*  $\mathbf{A}$ .

Réciproquement, si on dispose d'un système de réécriture linéaire  $(X, R)$ , on définit l'*idéal engendré par*  $R$  comme étant l'idéal  $I(R)$  où

$$R' = \{l - r \mid (l, r) \in R\}$$

On note  $\xleftrightarrow[R]{*}$  la clôture réflexive transitive et symétrique que la relation de réécriture  $\Rightarrow_R$ .

**Proposition 1.3.2.** Pour tous éléments  $f$  et  $g$  de  $\mathbb{K}\langle X \rangle$  :

$$f \xleftrightarrow[R]{*} g \text{ si, et seulement si, } f - g \in I(R).$$

En conséquence,

$$I(R) = \{f \in \mathbb{K}\langle X \rangle \mid f \xleftrightarrow[R]{*} 0\}.$$



Par la proposition précédente, le système de réécriture linéaire  $(X, R)$  présente l'algèbre

$$\mathbf{A} = \mathbb{K}\langle X \rangle / I(R)$$

On note  $\mathbf{A}(X, R)$ .

Il existe une autre façon équivalente de travailler sur une algèbre  $\mathbf{A}(X, R)$ . Pour un espace vectoriel  $V$ , on désigne par  $T(V)$  l'algèbre tensorielle engendrée par  $V$ . On définit l'ensemble

$$R' = \{l - r \mid (l, r) \in R\}$$

On définit  $V$  l'espace vectoriel engendré par  $X$  et  $E$  le sous-espace de  $T(V)$  engendré par  $R'$ . On note cette algèbre  $\mathbf{A}(V, E)$ . On a alors

$$\mathbf{A} = T(V)/I(E) = T(\mathbb{K}X)/I(R) = \mathbb{K}\langle X \rangle / I(R).$$

**Définition 1.3.9.** Deux systèmes de réécriture linéaires sont dits équivalents s'ils présentent la même algèbre.

**Proposition 1.3.3.** Tout système de réécriture linéaire convergent est équivalent à un système de réécriture linéaire convergent et réduit.

## 1.4 Bases de Gröbner

Les bases de Gröbner sont des familles génératrices d'idéaux et correspondent à la notion de confluence pour les systèmes de réécriture. Elles permettent de travailler sur les algèbres au moyen de systèmes de réécriture linéaires convergents. Il s'agit donc d'une notion centrale dans cette étude. Les bases de Gröbner ont d'abord été étudiées dans le cas commutatif et de nombreuses introductions aux bases de Gröbner (comme [3]) se concentrent sur le cas commutatif.

Dans le cas non-commutatif, l'idée générale reste la même que dans le cas commutatif. Nous allons définir les bases de Gröbner dans le cas non commutatif. On pourra se référer à [21].

On définit l'alphabet

$$X = \{x_1, \dots, x_n\}$$

On se fixe pour la suite un ordre monomial  $<$  (cf définition 1.3.3).

**Définition 1.4.1.** Soit  $f$  un terme unitaire. On a alors  $f = H(f) + R(f)$ .

Le terme  $f$  induit une relation de réduction  $\Rightarrow_f$  sur l'algèbre  $\mathbb{K}\langle x_1, \dots, x_n \rangle$  défini de la façon suivante. Pour  $g$  et  $g'$  deux termes de  $\mathbb{K}\langle x_1, \dots, x_n \rangle$ , on dit que  $g$  se réduit en  $g'$  par  $\Rightarrow_f$ , si

1. le polynôme  $g$  contient un monôme  $m$  de coefficient  $a \neq 0$ ,
2. il existe deux monômes  $m'$  et  $m''$  tels que  $m = m'.H(f).m''$ ,
3. on a :  $g' = g - am'.f.m''$ .

On note alors  $g \Rightarrow_f g'$ . Si  $F = \{f_1, \dots, f_k\}$  est un ensemble fini de termes unitaires, on peut définir la relation de réduction  $\Rightarrow_F$  induite par  $F$  comme :

$$\Rightarrow_F = \bigcup_{i=1}^k \Rightarrow_{f_i}.$$

**Définition 1.4.2.** Soit  $J$  un idéal de l'algèbre des polynômes  $\mathbb{K}\langle x_1, \dots, x_n \rangle$ .

La relation d'équivalence  $\equiv_J$  induite par l'idéal  $J$  est définie par :

$$f \equiv_J g \text{ si } f - g \text{ est dans l'idéal } J$$



**Proposition 1.4.1.** Soit  $F = \{f_1, \dots, f_k\}$  un ensemble fini de termes unitaires et soit  $J = \langle f_1, \dots, f_k \rangle$  l'idéal engendré par  $f_1, \dots, f_k$ .

La relation de réduction  $\Rightarrow_F$  est terminante.

Si la relation de réduction  $\Rightarrow_F$  est de plus confluente, alors la relation d'équivalence  $\equiv_J$  est décidable.

C'est cette propriété qui justifie l'utilisation des systèmes de réécriture pour l'étude des algèbres.

**Définition 1.4.3.** Soit  $G = \{f_1, \dots, f_k\}$  un ensemble fini de termes unitaires.

Alors,  $G$  est une *base de Gröbner* de l'idéal  $J$ , si l'idéal  $J$  est engendré par les polynômes  $f_1, \dots, f_k$  et la relation de réduction  $\Rightarrow_G$  est confluente. Si de plus aucun sous-ensemble de  $G$  n'est une base de Gröbner, alors  $G$  est une base de Gröbner *réduite*.

Dans la suite du document, par « base de Gröbner » on entend « base de Gröbner réduite ».

Étant donné un ensemble fini de termes unitaires  $F = \{f_1, \dots, f_k\}$  et un idéal  $J$  engendré par l'ensemble  $F$ , un monôme  $v$  n'est pas en forme normale pour la relation de réduction  $\Rightarrow_F$  si, et seulement si,  $v$  peut s'écrire comme monôme dominant d'un terme dans  $J$ . Cette définition correspond bien à celle donnée précédemment.

Pour un élément  $u$  dans l'algèbre libre  $\mathbb{K}\langle x_1, \dots, x_n \rangle$ , on note  $\bar{u}$  sa classe dans l'algèbre  $\mathbf{A} = \mathbb{K}\langle x_1, \dots, x_n \rangle / J$ .

**Théorème 1.4.1.** Soit  $\mathbf{A}(X, R)$  une algèbre. Soit  $G$  un ensemble de termes unitaires de l'algèbre  $\mathbb{K}\langle X \rangle$ .

L'ensemble  $G$  est une base de Gröbner de l'idéal engendré par  $R$  si, et seulement si, pour tous éléments  $u$  et  $w$  dans l'ensemble  $G$ , pour tous monômes  $a, b$  et  $c$  tels que  $abc$  soit une paire critique et

$$ab = H(u) \text{ et } bc = H(w)$$

le terme  $a.R(w) - R(u).c$  se réduit en 0 par la relation  $\Rightarrow_G$ .

Ce théorème est une réécriture de la définition, mais il correspond à un point de vue différent.

**Définition 1.4.4.** Un monôme est appelé *obstruction* s'il n'est pas en forme normale mais que chacun de ses sous-mots est en forme normale.

On peut également trouver dans la littérature la définition suivante de base de Gröbner. Nous allons montrer que la définition 1.4.3 et celle donnée dans le théorème 1.4.2 sont équivalentes.

**Théorème 1.4.2.** Soit  $J$  un idéal. Soit  $\mathcal{O}$  l'ensemble des obstructions. L'ensemble

$$G = \{f - \bar{f} \mid f \in \mathcal{O}\}$$

est une base de Gröbner de l'idéal  $J$ .

**Remarque 1.4.1.** Les éléments  $f - \bar{f}$  dans cet ensemble  $G$  sont bien des termes unitaires dont le monôme de plus haut degré est  $f$  et dont le reste  $R(f)$  est le terme  $\bar{f}$ .

*Démonstration.* Montrons qu'une base de Gröbner définie comme dans la définition 1.4.3 peut bien s'écrire sous cette forme. Prenons  $G = \{f_1, \dots, f_k\}$  une base de Gröbner. Par définition de la relation de réécriture associée à  $G$ ,  $H(f_1)$  n'est pas en forme normale. De plus chacun de ses sous-mots est en forme normale, car  $G$  est une base de Gröbner réduite. Ceci prouve le premier point.



Montrons ensuite qu'un tel ensemble  $G = \{f - \bar{f} | f \in \mathcal{O}\}$  est bien une base de Gröbner réduite de l'idéal  $J$ . Tout d'abord, on note que, pour une base de Gröbner  $\mathcal{G}$  de l'idéal  $J$ , si  $f_1 \Rightarrow_{\mathcal{G}} f_2$ , alors  $\overline{f_1} = \overline{f_2}$  dans l'algèbre  $\mathbf{A}$ . Commençons par montrer que la relation de réécriture  $\Rightarrow_G$  engendrée est confluente. On suppose qu'elle ne l'est pas. Il existe donc une paire critique non confluente  $f$  : on pose  $f \xrightarrow{*}_G g$  et  $f \xrightarrow{*}_G h$  où  $g$  et  $h$  sont deux formes normales distinctes. On peut de plus supposer que  $g > h$ . On a alors  $\bar{f} = \bar{g}$  et  $\bar{f} = \bar{h}$ , ce qui donne :

$$\overline{g - h} = 0$$

Chacun des sous-mots de  $H(g)$  est en forme normale puisque  $g$  est une forme normale et  $H(g)$  n'est pas en forme normale :

$$\overline{H(g)} = \overline{h - R(g)}$$

Par conséquent  $H(g)$  est une obstruction, ce qui est impossible car  $g$  est en forme normale, donc son terme de plus haut degré aussi. D'où la confluence de la relation de réécriture.

Il reste à vérifier que l'idéal engendré par  $G$  est bien  $J$ . Il s'agit d'une conséquence directe de la définition des obstructions.  $\square$

Le théorème 1.4.1 est l'équivalent non commutatif du théorème précédemment montré pour les S-polynômes dans le cadre commutatif. Il correspond à la notion de paires critiques confluentes. Il permet donc d'en déduire un algorithme en tout point semblable à l'algorithme de Buchberger dans le cas commutatif. Cet algorithme est explicité dans la figure 1.1. Pour l'ensemble  $B_i$ , il est possible d'en prendre un plus petit en ne considérant que les paires critiques. Le terme qui correspond au S-polynôme n'étant plus commutatif, il existe une différence avec le cas commutatif : l'algorithme de Buchberger ne termine pas nécessairement. Nous allons illustrer par un exemple.

**Exemple 1.4.1.** Considérons l'algèbre

$$\mathbf{A} = \langle x, y | x^2 - y^2 \rangle$$

On se donne un ordre sur les lettres :  $x < y$ . Il induit l'ordre deglex  $<$  sur les monômes. On commence avec  $G_0 = \{x^2 - y^2\}$ . La seule paire critique possible est  $x^3$ .

$$\begin{array}{ccc} & G_0.x & \rightarrow y^2x \\ x^3 & \searrow & \\ & x.G_0 & \rightarrow xy^2 \end{array}$$

On obtient donc le terme  $xy^2 - y^2x$  qui est déjà en forme normale, ce qui nous donne

$$G_1 = \{x^2 - y^2, xy^2 - y^2x\}$$

Il existe une nouvelle paire critique  $x^2y^2$ .

$$\begin{array}{ccc} & x.G_1 & \rightarrow xy^2x \\ x^2y^2 & \searrow & \\ & G_0.y^2 & \rightarrow y^4 \end{array}$$

On obtient donc le terme  $xy^2x - y^4$  qui se réduit en 0 par  $G_1$ . Il n'y a plus de paires critiques dont la confluence est à étudier, ce qui nous donne la base de Gröbner :

$$G = \{x^2 - y^2, xy^2 - y^2x\}$$



---

**Entrée :** un ensemble  $F = \{f_1, \dots, f_k\}$  fini de termes unitaires de l'algèbre  $\mathbb{K}\langle x_1, \dots, x_n \rangle$ , muni d'un ordre monomial  $\succ$  sur  $M_n$ .

**Sortie :** un ensemble fini  $G_i$  de termes de  $\mathbb{K}\langle x_1, \dots, x_n \rangle$  tel que l'ensemble  $G_i$  soit une base de Gröbner de l'idéal engendré par les polynômes  $f_1, \dots, f_k$ .

**Initialisation :**

$i = 0$ ; # nombre d'étapes de calcul

$G_0 = F$ ; # ensemble qu'on complète en une base de Gröbner

$B_0 = \{(f_i, f_j) | 1 \leq i < j \leq k\}$ ; # ensemble des paires à considérer (il y a plus que juste les paires critiques).

Tant que  $B_i \neq \emptyset$ :

1. Prendre une paire  $(f_l, f_r)$  dans  $B_i$ ; On peut écrire  $H(f_l).m = m'.H(f_r)$ ;
2. Calculer une forme normale  $h$  du terme  $f_l.m - m'.f_r$  en réduisant les termes  $f_l$  et  $f_r$  par la relation de réduction  $\Rightarrow_{G_i}$ ;
3. Si  $h \neq 0$ , alors

$$\begin{aligned} B_{i+1} &= (B_i \setminus \{(f_l, f_r)\}) \cup \{(f, HC(h)^{-1}.h) | f \in G_i\}; \\ G_{i+1} &= G_i \cup \{HC(h)^{-1}.h\}; \\ i &= i + 1; \end{aligned}$$

4. Sinon :

$$\begin{aligned} B_{i+1} &= (B_i \setminus \{(f_l, f_r)\}); \\ G_{i+1} &= G_i; \\ i &= i + 1; \end{aligned}$$

Fin tant que;

Renvoyer  $G_i$ ;

---

FIGURE 1.1 – Algorithme de Buchberger dans le cas non commutatif

**Exemple 1.4.2.** On considère l'algèbre

$$A = \langle x, y, z | x^3 + y^3 + z^3 = xyz \rangle$$

On se donne un ordre sur les lettres  $x \prec y \prec z$  qu'on étend en l'ordre deglex sur les monômes. On peut alors orienter la relation :  $z^3 \xrightarrow{\alpha} xyz - x^3 - y^3$ . Cela donne une paire critique sur le



monôme  $z^4$

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{ccc}
 & zxyz - zx^3 - zy^3 & \\
 z\alpha \nearrow & & \\
 z^4 & & \\
 \searrow \alpha z & & \\
 & xyz^2 - x^3z - y^3z &
 \end{array}
 \end{array}$$

Pour compléter le système, on doit donc rajouter la règle  $zy^3 \xrightarrow{\beta} zxyz - zx^3 - xyz^2 + x^3z + y^3z$ .  
 La paire critique  $z^3y^3$  est déjà confluente, et on obtient donc la base de Gröbner

$$\begin{array}{lcl}
 z^3 & \xrightarrow{\alpha} & xyz - x^3 - y^3 \\
 zy^3 & \xrightarrow{\beta} & zxyz - zx^3 - xyz^2 + x^3z + y^3z
 \end{array}$$



## Chapitre 2

# Résolution d'Anick

Dans ce chapitre, nous détaillerons la première des approches considérées (Anick). Cette approche repose sur les systèmes de réécriture linéaires. On rappelle que par « système de réécriture linéaire » on entend « système de réécriture linéaire monomial compatible avec un ordre monomial ». Tout d'abord, nous définirons la notion d'idéal ordonné de monômes. Nous introduirons ensuite les  $n$ -chaînes, notamment par le graphe d'Ufnarowski. Tout ceci nous permettra de construire la résolution d'Anick. Nous l'utiliserons ensuite pour calculer l'homologie d'une algèbre augmentée.

### 2.1 Idéal ordonné de monômes

On pose pour cette section  $X$  un alphabet. On note  $\mathcal{M}(X)$  l'ensemble des monômes sur  $X$ .

**Définition 2.1.1.** Étant donnés  $m, n$  deux monômes,  $m$  est un *sous-monôme* de  $n$ , noté  $m \subseteq n$  s'il existe deux autres monômes  $a$  et  $b$  tels que le monôme  $n$  s'écrive  $n = amb$ .

La relation « être un sous-monôme » définit un ordre partiel sur l'ensemble des monômes  $\mathcal{M}(X)$ .

**Définition 2.1.2.** Un sous-ensemble  $M$  de  $\mathcal{M}(X)$  est un *idéal ordonné de monômes*, s'il vérifie la condition suivante : pour tout sous-monôme  $m$  d'un monôme  $n$  dans l'ensemble  $M$ , le monôme  $m$  est aussi dans l'ensemble  $M$ .

**Exemple 2.1.1.** Soit  $(X, R)$  un système de réécriture linéaire.

Un monôme  $m$  est dit *irréductible*, si le monôme  $m$  n'est pas réductible par la relation  $\Rightarrow_R$ , autrement dit, si aucun des sous-mots du monôme  $m$  n'est le monôme dominant d'une des règles de  $R$ . On note  $ir(R)$  l'ensemble des monômes irréductibles de  $X$ .

L'ensemble  $ir(R)$  est bien un idéal ordonné de monômes : si un monôme  $m$  est irréductible, aucun de ses sous-mots n'est réductible.

### 2.2 $n$ -chaînes

On considère un système de réécriture linéaire convergent  $(X, R)$  avec un ordre monomial  $\prec$ .

#### 2.2.1 Définition des $n$ -chaînes

**Définition 2.2.1.** Nous allons construire l'ensemble des  $n$ -chaînes. On note  $\mathcal{C}_n$  l'ensemble des  $n$ -chaînes. On pose  $\mathcal{C}_{-1} = \{1\}$  et  $\mathcal{C}_0 = X$ .



Si  $\mathcal{C}_{n-1}$  est construit, on définit par récurrence les  $n$ -chaînes. Le monôme  $f$  est une  $n$ -chaîne si  $f = gt$ , noté  $gt$ , tel que  $g$  est une  $(n-1)$ -chaîne et  $t \in X^*$  est la *queue* avec les conditions suivantes :

- la queue  $t$  est irréductible
- si  $g = g'r$  avec  $g'$  une  $(n-2)$ -chaîne et  $r$  la queue, alors le monôme  $rt$  est réductible d'une unique façon
- la seule réduction dans  $rt$  est de la forme  $u\alpha$  où  $u$  est un monôme et où  $\alpha$  est une réduction dans  $R$ .

La situation correspond au diagramme suivant :

$$\begin{array}{c} \frac{f(n)}{g(n-1)} \quad t \\ \hline g'(n-2) \quad r \end{array}$$

où on représente les monômes réductibles en pointillés, et où, pour tout entier  $p$ , les  $p$ -chaînes sont représentées par leur nom suivi de  $(p)$ .

Pour une  $n$ -chaîne  $f = gt$  où  $g$  est une  $(n-1)$ -chaîne et  $t$  est la queue, on note  $f = g|t$ .

**Exemple 2.2.1.** On prend comme alphabet  $X = \{x\}$  sur lequel on se donne une unique règle  $x^2 \xrightarrow{\alpha} 1$ .

On a  $\mathcal{C}_{-1} = \{1\}$  et  $\mathcal{C}_0 = \{x\}$ .

Calculons maintenant les 1-chaînes. Elles sont de la forme  $x|t$  telle que  $xt$  est réductible par  $\alpha$  de façon unique. Par conséquent, le seul choix possible pour  $t$  est  $x$  et la seule 1-chaîne est  $x|x$ . En effet, supposons que  $t = x^n$  pour  $n \geq 2$ , alors  $t$  serait réductible, ce qui contredirait la définition.

De façon similaire, on calcule les 2-chaînes en ajoutant une queue  $t$  à la 1-chaîne  $x|x$  telle que  $xt$  soit réductible de façon unique. Exactement comme dans le calcul de  $\mathcal{C}_1$ , la seule 2-chaîne possible est  $x|x|x$ . Par induction, on voit qu'à chaque étape on rajoute un  $x$  comme queue. Par conséquent, pour tout  $n \geq 1$ , il existe une seule  $n$ -chaîne  $\underbrace{x|x|\dots|x|x}_{n+1}$ .

**Exemple 2.2.2.** Considérons le système de réécriture, avec le même alphabet  $X = \{x\}$  mais avec une règle différente :  $x^3 \xrightarrow{\beta} 1$ . On a toujours  $\mathcal{C}_{-1} = \{1\}$  et  $\mathcal{C}_0 = \{x\}$ .

On peut maintenant calculer les 1-chaînes  $x|t$  telles que le monôme  $xt$  correspond à la partie gauche de la règle  $\beta$ . On doit donc avoir  $t = x^2$ , et la seule 1-chaîne possible est  $x|x^2$ .

Pour obtenir les 2-chaînes, on ajoute à  $x|x^2$  une queue  $t'$ . La queue  $t'$  ne doit pas être réductible, par conséquent ce doit être  $x$  ou bien  $x^2$ . On pourrait croire que les deux sont des solutions possibles, mais ce n'est pas le cas :  $t' = x$  est la seule solution possible. En effet, considérons les obstructions si on avait ajouté la queue  $x^2$  à la 1-chaîne  $x|x^2$ . Le monôme  $x^4$  peut être réduit par la gauche par  $\beta id_x$  et par la droite par  $id_x \beta$ . Par conséquent la queue  $x^2$  ne convient pas et la seule 2-chaîne possible est  $x|x^2|x$ .

De façon similaire, on doit alterner  $x$  et  $x^2$  comme queue pour calculer les  $n$ -chaînes.

On introduit la notation suivante :

$$w_n(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{if } n = 0 \\ x|w_{n-1}(y, x) & \text{sinon} \end{cases}$$

Cela correspond à

$$w_n(x, y) = \underbrace{x|y|x|y|\dots}_n$$



Si l'entier  $n$  est pair, on a  $w_n(x, y) = x|y|x|...|x|y$  et si l'entier  $n$  est impair, on a  $w_n(x, y) = x|y|x|...|y|x$ .

Pour un entier  $n \geq 1$ , la seule  $n$ -chaîne pour le système considéré est  $w_{n+1}(x, x^2)$ .

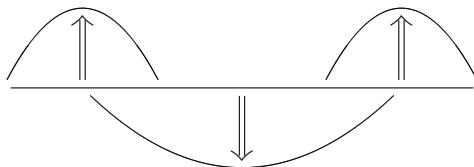
En fait, si on se place dans le cas d'un système de réécriture réduit, on sait que les 0-chaînes sont les lettres de l'alphabet. Les 1-chaînes correspondent aux parties gauches (monômes dominants) de règles et les 2-chaînes correspondent aux paires critiques, car on est dans le cas suivant :

$$\begin{array}{c} \underline{x} \quad \underline{t_1} \quad \underline{t_2} \\ \hline \end{array}$$

Considérons maintenant les 3-chaînes. On est dans le cas :

$$\begin{array}{c} \underline{x} \quad \underline{t_1} \quad \underline{t_2} \quad \underline{t_3} \\ \hline \end{array}$$

Les 3-chaînes sont donc les triplets critiques de la forme



On peut procéder de même pour les chaînes suivantes. Pour une  $n$ -chaîne  $f = x_{i_1}...x_{i_s}$  telle que  $f$  s'écrive aussi  $g|t$  où  $g$  est une  $(n-1)$ -chaîne et  $t$  est la queue, on définit l'indice  $b_n$  comme  $s = b_n$ . On définit ainsi par récurrence sur la structure de  $k$ -chaîne l'indice  $b_k$ . La  $(n-1)$ -chaîne  $g$  s'écrit donc  $x_{i_1}...x_{i_{b_{n-1}}}$ . On définit également l'indice  $a_n$  de la façon suivante :  $g|t$  est réductible par la droite par  $r$ . L'indice  $a_n$  est donné par

$$r = x_{i_{a_n}}...x_{i_{b_n}}.$$

On a donc pour tout  $n \geq 1$  :

$$b_{n-1} \leq a_n \leq b_n \leq a_{n+1}.$$

**Lemme 2.2.1.** Étant donnée une  $n$ -chaîne  $f$ , il existe une unique façon de l'écrire  $g|t$  où  $g$  est une  $(n-1)$ -chaîne et où  $t$  est un monôme irréductible. C'est-à-dire que les indices  $a_k$  et  $b_k$  pour  $1 \leq k \leq n$  sont déterminés de manière unique.

### 2.2.2 Graphe d'Ufnarovski

On peut représenter les  $n$ -chaînes comme des chemins dans un graphe  $\Gamma = (V, E)$ . Commençons par définir ce graphe. L'ensemble de ses sommets est l'ensemble des  $v$  qui sont les suffixes stricts de monômes dominants de relations dans  $R$ . L'ensemble de ses arrêtes est formé des arrêtes  $1 \rightarrow x$  pour toute lettre  $x$  de l'alphabet  $X$  ainsi que des arrêtes  $f \rightarrow g$  telles que le monôme  $fg$  est réductible mais tous les sous-mots de  $fg$  sont en forme normale.

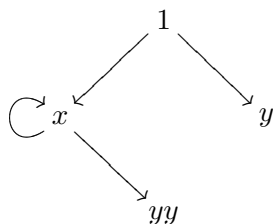
Une  $n$ -chaîne correspond alors aux sommets qu'on peut lire successivement en suivant un chemin de longueur  $n+1$  dans le graphe  $\Gamma$  à partir du sommet 1.

**Exemple 2.2.3.** On considère l'exemple suivant :

$$\mathbf{A} = \langle x, y|x^2, xy^2 \rangle$$



On obtient le graphe suivant :



Les 1-chaînes sont  $x$  et  $y$ , les 2-chaînes sont  $x|x$  et  $x|y^2$ . En toute généralité, pour un entier  $n \geq 2$ , les  $n$ -chaînes sont  $\underbrace{x|\dots|x}_n$  et  $\underbrace{x|\dots|x}_{n-1}|y^2$ .

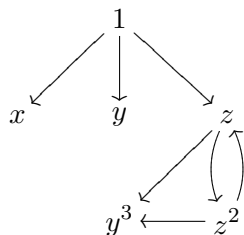
**Exemple 2.2.4.** Reprenons l'exemple 1.4.2 :

$$A = \langle x, y, z | x^3 + y^3 + z^3 = xyz \rangle$$

Calculons maintenant les  $n$ -chaînes. Pour cela, rappelons que la base de Gröbner que nous avons calculé pour un ordre monômial donné comprenait les deux règles :

$$\begin{aligned} z^3 &\xrightarrow{\alpha} xyz - x^3 - y^3 \\ zy^3 &\xrightarrow{\beta} zxyz - zx^3 - xyz^2 + x^3z + y^3z \end{aligned}$$

Le graphe d'Ufnarovski associé est :



Les  $n$ -chaînes sont donc :

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_{-1} &= \{1\} \\ \mathcal{C}_0 &= \{x, y, z\} \\ \mathcal{C}_1 &= \{z|z^2, z|y^3\} \\ \mathcal{C}_2 &= \{z|z^2|z, z|z^2|y^3\} \\ \mathcal{C}_n &= \{w_{n+1}(z, z^2), w_n(z, z^2)|y^3\} \text{ pour } n \geq 3 \end{aligned}$$

## 2.3 Résolution d'Anick

### 2.3.1 Préliminaires, notations

Dans toute cette section, on se donne un alphabet  $(X, <)$  totalement ordonné et un ensemble de relations  $R$  tels que le système de réécriture linéaire  $(X, R)$  soit convergent. Pour un sous-ensemble  $U$  de  $X^*$ , on note  $\mathbb{K}\langle U \rangle$  le sous-module de  $\mathbb{K}\langle X \rangle$  engendré par  $U$ . On se donne également une fonction de graduation  $e : X \rightarrow \mathbb{Z}$  qu'on peut étendre en un morphisme de monoïdes sur le monoïde  $X^*$ . On prend fréquemment pour une telle application  $e$  la longueur du mot considéré. Si elle n'est pas précisée par la suite, c'est qu'il s'agit de cette dernière.



L'ordre  $<$  sur les lettres dans l'alphabet  $X$  permet de généraliser l'ordre deglex : on appelle également deglex l'ordre total  $<$  sur  $X^*$ . Pour  $x$  et  $y$  deux éléments de  $X^*$ ,

$$x < y \text{ si } \begin{cases} e(x) < e(y) \\ \text{ou } e(x) = e(y) \text{ et } x <_{lex} y \end{cases}$$

Soit  $\mathbf{A}(X, R)$  une  $\mathbb{K}$ -algèbre. On se donne l'application

$$\begin{aligned} \pi : \mathbb{K}\langle X \rangle &\rightarrow \mathbf{A} \\ x &\rightarrow \bar{x} \end{aligned}$$

qui correspond au quotient sur l'algèbre  $\mathbf{A}$ .

Pour un élément  $x$  de  $\mathbb{K}\langle X \rangle$ , on note sa forme normale  $\hat{x}$ . Ceci est bien défini car le système de réécriture  $(X, R)$  est convergent.

**Lemme 2.3.1.** L'ensemble

$$M = \{x \in X^* | \bar{x} \notin Vect\langle \bar{y} | y < x \rangle\}$$

est un idéal ordonné de monômes et les éléments  $\bar{x}$  tels que  $x$  soit dans  $M$  forment une base de  $\mathbf{A}$  en tant que  $\mathbb{K}$ -module.

On écrit  $\mathbb{K}\langle U \rangle \otimes \mathbf{A}$  pour  $\mathbb{K}\langle U \rangle \otimes_{\mathbb{K}} \mathbf{A}$ . Le module  $\mathbb{K}\langle U \rangle \otimes \mathbf{A}$  a pour base

$$\hat{U} = \{u \otimes \bar{x} | u \in U, x \in M\}$$

par le lemme précédent. De plus le terme  $u \otimes \bar{x}$  sera fréquemment abrégé en  $u \otimes x$ .

On étend l'ordre  $<$  en un ordre partiel sur l'ensemble  $\hat{U}$  : On dit que  $u \otimes x < u' \otimes x'$  dans  $\hat{U}$  si  $ux < u'x'$  dans  $X^*$ .

Dans cette étude, on se restreint au cas où  $U$  est un ensemble  $\mathcal{C}_n$  de  $n$ -chaînes. Dans ce cas, l'ordre  $<$  est un ordre total sur le module  $\mathbb{K}\langle \mathcal{C}_n \rangle \otimes \mathbf{A}$ . Ceci permet en particulier de définir le terme de plus haut degré d'un terme dans  $\mathbb{K}\langle \mathcal{C}_n \rangle \otimes \mathbf{A}$ . Prenons un tel terme

$$w = \sum_{j=1}^g c_j(u_j \otimes v_j)$$

où les coefficients  $c_j$  sont des scalaires non nuls, où les  $u_j$  sont des  $n$ -chaînes et où les  $v_j$  sont des monômes : on dit que le terme  $u_i \otimes v_i$  est le terme de plus haut degré de  $w$  si  $i = g = 1$ , ou si, pour tout  $j \neq i$ ,  $u_i \otimes v_i > u_j \otimes v_j$ . On pose alors  $LT(w) = u_1 v_1$  qu'on appellera également terme de plus haut degré de  $w$ .

**Définition 2.3.1.** Soit  $\mathbf{A}$  une algèbre et soit  $\eta : \mathbb{K} \hookrightarrow \mathbf{A}$  le plongement de  $\mathbb{K}$  dans  $\mathbf{A}$ . On dit qu'une application  $\epsilon : \mathbf{A} \rightarrow \mathbb{K}$  est une *augmentation* de l'algèbre  $\mathbf{A}$  si l'application  $\epsilon$  est un morphisme d'algèbres tel que l'application  $\eta$  soit un inverse à droite de l'application  $\epsilon$ . On dit alors que  $(\mathbf{A}, \epsilon)$  est une *algèbre augmentée*.

### 2.3.2 Construction de la résolution d'Anick

**Théorème 2.3.1.** Soit  $(\mathbf{A}(X, R), \epsilon)$  une  $\mathbb{K}$ -algèbre augmentée, telle que le système de réécriture  $(X, R)$  soit convergent. Pour tout entier  $n$ , soit  $\mathcal{C}_n$  l'ensemble des  $n$ -chaînes associé au système de réécriture  $(X, R)$ .



Alors il existe une résolution libre de  $\mathbb{K}$  comme  $\mathbf{A}$ -module à droite :

$$\cdots \longrightarrow \mathcal{A}_n \xrightarrow{\delta_n} \mathcal{A}_{n-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow \mathcal{A}_0 \xrightarrow{\delta_0} \mathcal{A}_{-1} \xrightarrow{\epsilon} \mathbb{K} \longrightarrow 0$$

où

$$\mathcal{A}_n = \mathbb{K}\langle \mathcal{C}_n \rangle \otimes \mathbf{A}$$

avec, pour  $x$  élément de  $X$  :

$$\delta_0(x \otimes 1) = x - \eta\epsilon(x) \quad (2.1)$$

et pour  $n \geq 1$  :

$$\delta_n(x_{i_1} \dots x_{i_{b_n}} \otimes 1) = x_{i_1} \dots x_{i_{b_{n-1}}} \otimes x_{i_{b_{n-1}+1}} \dots x_{i_{b_n}} + w \quad (2.2)$$

avec  $LT(w) < x_{i_1} \dots x_{i_{b_n}}$  si  $w \neq 0$ .

*Démonstration.* On montre l'exactitude par récurrence, en construisant le bord  $\delta_n$  et une homotopie contractante  $\sigma_n$  à chaque étape.

$$\cdots \begin{array}{c} \xrightarrow{\quad} \\ \xleftarrow{\quad} \end{array} \mathcal{A}_n \begin{array}{c} \xrightarrow{\delta_n} \\ \xleftarrow{\sigma_n} \end{array} \mathcal{A}_{n-1} \begin{array}{c} \xrightarrow{\quad} \\ \xleftarrow{\quad} \end{array} \cdots \begin{array}{c} \xrightarrow{\quad} \\ \xleftarrow{\quad} \end{array} \mathcal{A}_0 \begin{array}{c} \xrightarrow{\delta_0} \\ \xleftarrow{\sigma_0} \end{array} \mathcal{A}_{-1} \begin{array}{c} \xrightarrow{\epsilon} \\ \xleftarrow{\eta} \end{array} \mathbb{K} \longrightarrow 0$$

Pour tout  $n$ , il suffit de définir  $\sigma_n$  sur le noyau  $\ker(\delta_{n-1})$ .

On vérifie également à chaque étape de récurrence les conditions suivantes, pour  $0 \leq j$  et pour  $w \in \ker \delta_{j-1}$ ,

$$\delta_{j-1}\delta_j = 0 \quad (2.3)$$

$$\delta_j\sigma_j = id_{\ker \delta_{j-1}} \quad (2.4)$$

$$LT(\sigma_j(w)) = LT(w) \quad (2.5)$$

**Exactitude en  $\mathbf{A} = \mathcal{A}_{-1}$  :** Pour tout  $x$  élément de  $\mathbb{K}\langle \mathcal{C}_{-1} \rangle \otimes \mathbf{A} = \mathbf{A}$ , on a la condition 2.3 :

$$\epsilon\delta_0(x \otimes 1) = \epsilon(x) - \epsilon\eta\epsilon(x) = 0$$

Le noyau  $\ker \epsilon$  est engendré par  $\{y - \eta\epsilon(y) | y \in \mathbf{A}\}$ . En effet, étant donné un élément  $y$  de l'algèbre  $\mathbf{A}$  :

$$\epsilon(y - \eta\epsilon(y)) = \epsilon(y) - \epsilon\eta\epsilon(y) = \epsilon(y) - \epsilon(y) = 0$$

Pour la réciproque, tout élément  $y$  dans le noyau de  $\epsilon$  s'écrit  $y - \eta\epsilon(y) = y$ .

Par conséquent, pour définir l'homotopie contractante  $\sigma_0$ , il suffit de la définir sur les générateurs  $y - \eta\epsilon(y)$  (où  $y$  est un élément de  $\mathbf{A}$ ). Comme  $y$  est un élément de l'algèbre  $\mathbf{A}$  et comme le système de réécriture est convergent, l'élément  $y$  a une unique forme normale  $\hat{y} = x_{i_1} \dots x_{i_t}$ . On pose alors :

$$\sigma_0(y - \eta\epsilon(y)) = (x_{i_1} \otimes x_{i_2} \dots x_{i_t}) + \epsilon(x_{i_1})(x_{i_2} \otimes x_{i_3} \dots x_{i_t}) + \dots + \epsilon(x_{i_1} \dots x_{i_{t-1}})(x_{i_t} \otimes 1)$$

On peut étendre  $\sigma_0$  en une application entre  $\mathbb{K}$ -modules  $\sigma_0 : \ker \epsilon \rightarrow \mathbb{K}\langle \mathcal{C}_{-1} \rangle \otimes \mathbf{A}$  qui vérifie bien la condition 2.5.



Il reste à vérifier la condition 2.4. Prenons un élément  $y$  tel que défini précédemment :

$$\begin{aligned}
\delta_0 \sigma_0(y - \eta \epsilon(y)) &= \delta_0((x_{i_1} \otimes x_{i_2} \dots x_{i_t}) + \epsilon(x_{i_1})(x_{i_2} \otimes x_{i_3} \dots x_{i_t}) + \dots + \epsilon(x_{i_1} \dots x_{i_{t-1}})(x_{i_t} \otimes 1)) \\
&= (x_{i_1} - \eta \epsilon(x_{i_1}))(x_{i_2} \dots x_{i_t}) + \epsilon(x_{i_1})(x_{i_2} - \eta \epsilon(x_{i_2}))(x_{i_3} \dots x_{i_t}) + \dots \\
&\quad + \epsilon(x_{i_1} \dots x_{i_{t-1}})(x_{i_t} - \eta \epsilon(x_{i_t})) \\
&= (x_{i_1} x_{i_2} \dots x_{i_t}) - \epsilon(x_{i_1} \dots x_{i_{t-1}} x_{i_t})
\end{aligned}$$

car  $\epsilon$  est un morphisme d'algèbres, donc pour deux éléments  $a, b$  de  $\mathbf{A}$ , on a  $\epsilon(ab) = \epsilon(a)\epsilon(b)$ , et  $\eta$  est une application linéaire, donc pour un élément  $a$  de  $\mathbf{A}$ , on a  $\eta \epsilon(a) = \epsilon(a)\eta(1) = \epsilon(a)$

$$\delta_0 \sigma_0(y - \eta \epsilon(y)) = y - \eta \epsilon(y)$$

**Induction :** Si on suppose que pour  $n \geq 1$ , on a défini les bords  $\delta_j$ , pour  $0 \leq j \leq n-1$ , ainsi que les homotopies contactantes  $\sigma_j : \ker \delta_{j-1} \rightarrow \mathbb{K}\langle \mathcal{C}_j \rangle \otimes \mathbf{A}$ , pour  $0 \leq j \leq n-1$ , qui vérifient les deux propriétés souhaitées.

Commençons par définir l'application entre  $\mathbf{A}$ -modules  $\delta_n : \mathbb{K}\langle \mathcal{C}_n \rangle \otimes \mathbf{A} \rightarrow \mathbb{K}\langle \mathcal{C}_{n-1} \rangle \otimes \mathbf{A}$ . Comme l'application  $\delta_n$  est un morphisme d'algèbres, il suffit de définir  $\delta_n(u \otimes 1)$  avec  $u$  élément de  $V^{\otimes n}$  pour connaître le bord  $\delta_n$ .

Une  $n$ -chaîne  $u$  se décompose de façon unique comme  $u = r|s$  avec  $r$  une  $(n-1)$ -chaîne et  $s$  la queue. Comme l'application  $\delta_{n-1}$  est un morphisme d'algèbre, on a  $\delta_{n-1}(r \otimes s) = \delta_{n-1}(r \otimes 1).s$ . On pose

$$\delta_n(u \otimes 1) = r \otimes s - \sigma_{n-1} \delta_{n-1}(r \otimes s)$$

Vérifions que l'application  $\delta$  ainsi définie satisfait bien les conditions souhaitées. Si on écrit  $u = x_{i_1} \dots x_{i_{b_n}}$  avec  $x_k$  dans l'alphabet  $X$ , alors, par induction, on a (2.2) :

$$\begin{aligned}
\delta_{n-1}(r \otimes 1).s &= (x_{i_1} \dots x_{i_{b_{n-2}}} \otimes x_{i_{b_{n-2}+1}} \dots x_{i_{b_{n-1}}})(x_{i_{b_{n-1}+1}} \dots x_{i_{b_n}}) + w \\
&= x_{i_1} \dots x_{i_{b_{n-2}}} \otimes f(x_{i_{b_{n-2}+1}} \dots x_{i_{b_n}}) + w
\end{aligned} \tag{2.6}$$

où de plus  $HT(w) < u$ .

Le terme  $x_{i_{b_{n-2}+1}} \dots x_{i_{b_n}}$  admet comme sous-monôme l'obstruction  $x_{i_{a_n}} \dots x_{i_{b_n}}$  définie à l'étape de récurrence précédente. Par conséquent, le terme de plus haut degré du membre de droite de (2.6) est de degré inférieur à  $u$ . Ceci vérifie donc la condition 2.2.

On vérifie maintenant la condition 2.3 :

$$\begin{aligned}
\delta_{n-1} \delta_n(u \otimes 1) &= \delta_{n-1}(r \otimes s - \sigma_{n-1} \delta_{n-1}(r \otimes s)) \\
&= \delta_{n-1}(r \otimes s) - \delta_{n-1} \sigma_{n-1} \delta_{n-1}(r \otimes s) \\
&= \delta_{n-1}(r \otimes s) - \delta_{n-1}(r \otimes s) = 0
\end{aligned}$$

On peut maintenant définir l'homotopie contractante  $\sigma_n : \ker \delta_{n-1} \rightarrow \mathbb{K}\langle \mathcal{C}_n \rangle \otimes \mathbf{A}$ . Pour  $n$  fixé, on la définit par induction sur le degré de son argument.

Pour un élément  $U$  de  $\ker \delta_{n-1}$ ,  $U$  s'écrit  $\lambda f \otimes t + V$  où  $f$  est une  $(n-1)$ -chaîne,  $t$  un élément de l'algèbre  $\mathbf{A}$  et  $V$  est une somme de termes de degrés inférieurs à celui de  $f \otimes t$ . De plus la  $(n-1)$ -chaîne  $f$  peut s'écrire comme  $g|t'$  où  $g$  est une  $(n-2)$ -chaîne et  $t'$  un élément de l'algèbre  $\mathbf{A}$ .

Montrons que le terme  $t't$  est réductible. Supposons pour cela que le terme  $t't$  n'est pas réductible. Par conséquent,  $LT(g \otimes t't) = LT(f \otimes t) = ft$ . Par hypothèse de récurrence,  $\delta_{n-1}$  vérifie la condition 2.2 :

$$\delta_{n-1}(f \otimes t) = g \otimes t't + \Lambda$$



où  $LT(\Lambda) < LT(g \otimes t't)$ . Par la condition 2.3, on sait que  $\delta_n \delta_{n-1} = 0$ , or :

$$\begin{aligned}\delta_n \delta_{n-1}(f \otimes t) &= \delta_n(g \otimes t't + \Lambda) \\ &= \delta_n(g \otimes t't) + \delta_n(\Lambda)\end{aligned}$$

Par la condition 2.2 qu'on a vérifiée au préalable pour  $\delta_n$ , on sait que le terme de plus haut degré de  $\delta_n(g \otimes t't)$  est  $LT(\delta_n(g \otimes t't)) = LT(g \otimes t't) = ft$ . De façon similaire, le terme de plus haut degré de  $\delta_n(\Lambda)$  est  $LT(\delta_n(\Lambda)) = LT(\Lambda) < ft$ . Ceci est impossible, car alors on ne peut pas annuler le terme de plus haut degré. Par conséquent, le terme  $t't$  est bien réductible.

$$\begin{array}{c} \frac{f(n-1)}{\frac{g(n-2)}{\frac{t'}{v'} \frac{w}{w_2} \frac{t}{w_1} \frac{v}{v}}} \end{array}$$

A priori, le terme  $t't$  est réductible de plusieurs façons. On choisit pour  $w$  la réduction la plus à gauche possible. On pose alors :

$$\sigma_n(U) = \lambda g v' w \otimes v + \sigma_n(U - \lambda \delta_n(g v' w \otimes v))$$

Pour montre que l'application  $\sigma_n$  est bien définie, il faut donc montrer que

$$LT(U - \lambda \delta_n(g v' w \otimes v)) < LT(U).$$

Ceci est bien le cas car l'application  $\delta_n$  satisfait la condition 2.2 et donc

$$\begin{aligned}\delta_n(g v' w \otimes v) &= g v' w_1 \otimes w_2 + W \\ &= f \otimes t + W\end{aligned}$$

où  $W$  est une somme de termes de degré  $LT(W) < ft$ . On a donc

$$LT(U - \lambda \delta_n(g v' w \otimes v)) = LT(W) < LT(U).$$

Donc l'homotpie contractante  $\sigma_n$  est ainsi bien définie .

Il reste à montrer que l'homotpie contractante  $\sigma_n$  satisfait bien les conditions souhaitées. Prenons un élément  $U$  dans le noyau de  $\delta_{n-1}$ . On reprend les notations utilisées pour définir  $\sigma_n$ , et on montre les conditions souhaitées par induction sur le degré de l'argument de  $\sigma_n$  :

$$\begin{aligned}\delta_n \sigma_n(U) &= \delta_n(\lambda g v' w \otimes v + \sigma_n(U - \lambda \delta_n(g v' w \otimes v))) \\ &= \delta_n(\lambda g v' w \otimes v) + \delta_n \sigma_n(U - \lambda \delta_n(g v' w \otimes v)) \\ &= \lambda \delta_n(g v' w \otimes v) + (U - \lambda \delta_n(g v' w \otimes v)) = U\end{aligned}$$

Ceci vérifie donc bien la condition 2.4.

Par induction sur le degré de l'argument,

$$LT(\sigma_n(U - \lambda \delta_n(g v' w \otimes v))) = LT(U - \lambda \delta_n(g v' w \otimes v)).$$

De plus, on a montré que

$$LT(U - \lambda \delta_n(g v' w \otimes v)) < LT(U).$$

Donc

$$LT(\sigma_n(U - \lambda \delta_n(g v' w \otimes v))) < LT(U) = LT(g v' w \otimes v).$$

Par conséquent,  $LT(\sigma_n(U)) = g v' w v = LT(U)$ , ce qui correspond à la condition 2.5.

□



### 2.3.3 Exemples

Nous allons donner quelques exemples de calcul de résolutions d'Anick. On commence par rappeler la définition de la notation  $w_n(x, y)$  :

$$w_n(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{if } n = 0 \\ x|w_{n-1}(y, x) & \text{otherwise} \end{cases}$$

**Exemple 2.3.1.** Reprenons l'exemple 1.4.2 :

$$\mathbf{A} = \langle x, y, z | x^3 + y^3 + z^3 = xyz \rangle$$

Nous avons complété les règles de réduction pour obtenir les deux règles de la base de Gröbner :

$$\begin{aligned} z^3 &\xrightarrow{\alpha} xyz - x^3 - y^3 \\ zy^3 &\xrightarrow{\beta} zxyz - zx^3 - xyz^2 + x^3z + y^3z \end{aligned}$$

Nous en avons calculé les  $n$ -chaînes dans l'exemple 2.2.4. Nous pouvons désormais calculer la résolution d'Anick de l'algèbre considérée. On construit la résolution d'Anick en calculant les opérateurs de bord ainsi que l'homotopie contractante :

$$\cdots \begin{array}{c} \xrightarrow{\quad} \\ \xleftarrow{\quad} \end{array} \mathcal{A}_n \begin{array}{c} \xrightarrow{\delta_n} \\ \xleftarrow{\sigma_n} \end{array} \mathcal{A}_{n-1} \cdots \begin{array}{c} \xrightarrow{\quad} \\ \xleftarrow{\quad} \end{array} \mathcal{A}_0 \begin{array}{c} \xrightarrow{\delta_0} \\ \xleftarrow{\sigma_0} \end{array} \mathcal{A}_{-1} \begin{array}{c} \xrightarrow{\epsilon} \\ \xleftarrow{\eta} \end{array} \mathbb{K} \longrightarrow 0$$

Le calcul sur les 0-chaînes est direct :

$$\delta_0(x \otimes 1) = 1 \otimes x, \quad \delta_0(y \otimes 1) = 1 \otimes y, \quad \delta_0(z \otimes 1) = 1 \otimes z.$$

Pour le calcul du bord, on doit calculer l'homotopie contractante. Sur les 1-chaînes, le calcul est direct :

$$\begin{aligned} \delta_1(z|z^2 \otimes 1) &= z \otimes z^2 - \sigma_0 \delta_0(z \otimes z^2) \\ &= z \otimes z^2 - \sigma_0(1 \otimes (xyz - x^3 - y^3)) \\ &= z \otimes z^2 - x \otimes yz + x \otimes x^2 + y \otimes y^2. \end{aligned}$$

et de même

$$\begin{aligned} \delta_1(z|y^3 \otimes 1) &= z \otimes y^3 - \sigma_0 \delta_0(z \otimes y^3) \\ &= z \otimes y^3 - \sigma_0(1 \otimes (zxyz - zx^3 - xyz^2 + x^3z + y^3z)) \\ &= z \otimes y^3 - z \otimes xyz + z \otimes x^3 + x \otimes yz^2 - x \otimes x^2z - y \otimes y^2z. \end{aligned}$$

Les étapes suivantes sont plus longues, car le calcul de l'homotopie contractante n'est plus aussi immédiat. Commençons avec les 2-chaînes  $z|z^2|z$  et  $z|z^2|y^3$  :

$$\begin{aligned} \delta_2(z|z^2|z \otimes 1) &= z|z^2 \otimes z - \sigma_1 \delta_1(z|z^2 \otimes z) \\ &= z|z^2 \otimes z - \sigma_1(z \otimes z^3 - x \otimes yz^2 + x \otimes x^2z + y \otimes y^2z) \\ &= z|z^2 \otimes z - \sigma_1(\underbrace{z \otimes (xyz - x^3 - y^3) - x \otimes yz^2 + x \otimes x^2z + y \otimes y^2z}_U). \end{aligned}$$



Le terme de plus haut degré dans  $U$  est  $-z \otimes y^3$  d'où

$$\begin{aligned}\sigma_1(U) &= -zy^3 \otimes 1 + \sigma_1(U + \delta_1(z|y^3 \otimes 1)) \\ &= -zy^3 \otimes 1 + \sigma_1(U + z \otimes y^3 - z \otimes xyz + z \otimes x^3 + x \otimes yz^2 - x \otimes x^2z - y \otimes y^2z) \\ &= -zy^3 \otimes 1.\end{aligned}$$

On obtient

$$\boxed{\delta_2(z|z^2|z \otimes 1) = z|z^2 \otimes z + zy^3 \otimes 1}.$$

Calculons ensuite  $\delta_2(z|z^2|y^3)$  :

$$\begin{aligned}\delta_2(z|z^2|y^3 \otimes 1) &= z|z^2 \otimes y^3 - \sigma_1\delta_1(z|z^2 \otimes y^3) \\ &= z|z^2 \otimes y^3 - \sigma_1(z \otimes z^2y^3 - x \otimes yzy^3 + x \otimes x^2y^3 + y \otimes y^5) \\ &= z|z^2 \otimes y^3 - \\ &\quad \sigma_1(\underbrace{z \otimes (z^2xyz - z^2x^3 - zxyz^2 + zx^3z + zy^3z)}_{U_1} + x \otimes (-yzy^3 + x^2y^3) + y \otimes y^5).\end{aligned}$$

Le terme de plus haut degré dans  $U_1$  est  $z \otimes z^2xyz$  d'où

$$\begin{aligned}\sigma_1(U_1) &= z|z^2 \otimes xyz + \sigma_1(U_1 - \delta_1(z|z^2 \otimes xyz)) \\ &= z|z^2 \otimes xyz + \sigma_1(U_1 - (z \otimes z^2xyz - x \otimes yzxyz + x \otimes x^3yz + y \otimes y^2xyz)) \\ &= z|z^2 \otimes xyz + \\ &\quad \sigma_1(\underbrace{z \otimes (-z^2x^3 - zxyz^2 + zx^3z + zy^3z)}_{U_2} + x \otimes (yzxyz - yzy^3 + x^2y^3 - x^3yz) + y \otimes (y^5 - y^2xyz)).\end{aligned}$$

Le terme de plus haut degré dans  $U_2$  est  $-z \otimes z^2x^3$  d'où

$$\begin{aligned}\sigma_1(U_2) &= -z|z^2 \otimes x^3 + \sigma_1(U_2 + \delta_1(z|z^2 \otimes x^3)) \\ &= -z|z^2 \otimes x^3 + \sigma_1(U_2 + (z \otimes z^2x^3 - x \otimes yzx^3 + x \otimes x^5 + y \otimes y^2x^3)) \\ &= -z|z^2 \otimes x^3 + \sigma_1(z \otimes (-zxyz^2 + zx^3z + zy^3z) + \\ &\quad x \otimes (yzxyz - yzy^3 - yzx^3 + x^2y^3 - x^3yz + x^5) + y \otimes (y^5 - y^2xyz + y^2x^3)).\end{aligned}$$

Simplifions le terme de la forme  $z \otimes \dots$  dans l'argument de  $\sigma_1$ . On représente en bleu quand on applique la règle  $\beta$  et en rouge quand on applique la règle  $\alpha$  :

$$\begin{aligned}&-zxyz^2 + zx^3z + zy^3z \\ &= -\cancel{zxyz^2} + \cancel{zx^3z} + \cancel{zy^3z} - \cancel{zx^3z} - \cancel{xy^3z} + x^3z^2 + y^3z^2 \\ &= -\cancel{xyz^3} + x^3z^2 + y^3z^2 \\ &= -\cancel{xyxyz} + \cancel{xyx^3} + \cancel{xy^4} + x^3z^2 + y^3z^2.\end{aligned}$$

On doit donc calculer  $\sigma_1(U_3)$  où  $U_3 = z \otimes (-xyxyz + xyx^3 + xy^4 + x^3z^2 + y^3z^2) + x \otimes (yzxyz - yzy^3 - yzx^3 + x^2y^3 - x^3yz + x^5) + y \otimes (y^5 - y^2xyz + y^2x^3)$ . Le terme de plus haut degré est  $z \otimes y^3z^2$  et donc

$$\begin{aligned}\sigma_1(U_3) &= z|y^3 \otimes z^2 + \sigma_1(U_3 - \delta_1(z|y^3 \otimes z^2)) \\ &= z|y^3 \otimes z^2 + \sigma_1(U_3 + z \otimes (-y^3z^2 + xyz^3 - x^3z^2) - x \otimes (yz^4 + x^2z^3) + y \otimes y^2z^3) \\ &= z|y^3 \otimes z^2.\end{aligned}$$



On obtient

$$\boxed{\delta_2(z|z^2|y^3 \otimes 1) = z|z^2 \otimes (x^3 + y^3 - xyz) - z|y^3 \otimes z^2}.$$

On a donc obtenu  $\delta_2$  dans tous les cas.

On passe maintenant au calcul de  $\delta_3$  sur les 3-chaînes  $z|z^2|z|z^2$  et  $z|z^2|z|y^3$  :

$$\begin{aligned} \delta_3(z|z^2|z|z^2 \otimes 1) &= z|z^2|z \otimes z^2 - \sigma_2 \delta_2(z|z^2|z \otimes z^2) \\ &= z|z^2|z \otimes z^2 - \sigma_2(z|z^2 \otimes z^3 + z|y^3 \otimes z^2) \\ &= z|z^2|z \otimes z^2 - \sigma_2 \underbrace{(z|z^2 \otimes (xyz - x^3 - y^3) + z|y^3 \otimes z^2)}_U. \end{aligned}$$

Le terme de plus haut degré dans  $U$  est  $-z|z^2 \otimes y^3$  d'où

$$\begin{aligned} \sigma_2(U) &= -z|z^2|y^3 \otimes 1 + \sigma_2(U + \delta_2(z|z^2|y^3 \otimes 1)) \\ &= -z|z^2|y^3 \otimes 1 + \sigma_2(U + z|z^2 \otimes (x^3 + y^3 - xyz) - z|y^3 \otimes z^2) \\ &= -z|z^2|y^3 \otimes 1. \end{aligned}$$

On obtient

$$\boxed{\delta_3(z|z^2|z^2|z \otimes 1) = z|z^2|z \otimes z^2 + z|z^2|y^3 \otimes 1}.$$

Calculons maintenant  $\delta_3(z|z^2|z|y^3)$  :

$$\begin{aligned} \delta_3(z|z^2|z|y^3 \otimes 1) &= z|z^2|z \otimes y^3 - \sigma_2 \delta_2(z|z^2|z \otimes y^3) \\ &= z|z^2|z \otimes y^3 - \sigma_2(z|z^2 \otimes zy^3 + z|y^3 \otimes y^3) \\ &= z|z^2|z \otimes y^3 - \sigma_2 \underbrace{(z|z^2 \otimes (zxyz - zx^3 - xyz^2 + x^3z + y^3z) + z|y^3 \otimes y^3)}_{U_1}. \end{aligned}$$

Le terme de plus haut degré dans  $U_1$  est  $z|z^2 \otimes zxyz$  d'où

$$\begin{aligned} \sigma_2(U_1) &= z|z^2|z \otimes xyz + \sigma_2(U_1 - \delta_2(z|z^2|z \otimes xyz)) \\ &= z|z^2|z \otimes xyz + \sigma_2(U_1 - (z|z^2 \otimes zxyz + z|y^3 \otimes xyz)) \\ &= z|z^2|z \otimes xyz + \sigma_2 \underbrace{(z|z^2 \otimes (-zx^3 - xyz^2 + x^3z + y^3z) + z|y^3 \otimes (y^3 - xyz))}_{U_2}. \end{aligned}$$

Le terme de plus haut degré dans  $U_2$  est  $-z|z^2 \otimes zx^3$  d'où

$$\begin{aligned} \sigma_2(U_2) &= -z|z^2|z \otimes x^3 + \sigma_2(U_2 + \delta_2(z|z^2|z \otimes x^3)) \\ &= -z|z^2|z \otimes x^3 + \sigma_2(U_2 + (z|z^2 \otimes zx^3 + z|y^3 \otimes x^3)) \\ &= -z|z^2|z \otimes x^3 + \sigma_2 \underbrace{(z|z^2 \otimes (-xyz^2 + x^3z + y^3z) + z|y^3 \otimes (y^3 + x^3 - xyz))}_{U_3}. \end{aligned}$$

Le terme de plus haut degré dans  $U_3$  est  $z|z^2 \otimes y^3z$  d'où

$$\begin{aligned} \sigma_2(U_3) &= z|z^2|y^3 \otimes z + \sigma_2(U_3 - \delta_2(z|z^2|y^3 \otimes z)) \\ &= z|z^2|y^3 \otimes z + \sigma_2(U_3 - (z|z^2 \otimes (x^3z + y^3z - xyz^2) - z|y^3 \otimes z^3)) \\ &= z|z^2|y^3 \otimes z + \sigma_2(z|y^3 \otimes (z^3 + y^3 + x^3 - xyz)) \\ &= z|z^2|y^3 \otimes z. \end{aligned}$$



On obtient

$$\delta_3(z|z^2|z|y^3 \otimes 1) = z|z^2|z \otimes (x^3 + y^3 - xyz) - z|z^2|y^3 \otimes z.$$

De façon identique au cas des 3-chaînes, on montre par récurrence que, pour  $n \geq 1$ ,

$$\begin{aligned} \delta_{2n}(w_{2n+1}(z, z^2) \otimes 1) &= w_{2n}(z, z^2) \otimes z + w_{2n-1}(z, z^2)|y^3 \otimes 1 \\ \delta_{2n}(w_{2n}(z, z^2)|y^3 \otimes 1) &= w_{2n}(z, z^2) \otimes (x^3 + y^3 - xyz) - w_{2n-1}(z, z^2)|y^3 \otimes z^2 \\ \delta_{2n+1}(w_{2n+2}(z, z^2) \otimes 1) &= w_{2n+1}(z, z^2) \otimes z^2 + w_{2n}(z, z^2)|y^3 \otimes 1 \\ \delta_{2n+1}(w_{2n}(z, z^2)|y^3 \otimes 1) &= w_{2n+1}(z, z^2) \otimes (x^3 + y^3 - xyz) - w_{2n}(z, z^2)|y^3 \otimes z. \end{aligned}$$

### 2.3.4 Application au calcul de l'homologie d'une algèbre augmentée

**Définition 2.3.2.** Soit  $(\mathbf{A}, \epsilon)$  une algèbre augmentée. Soit  $M$  un  $\mathbf{A}$ -module à droite. Soit une résolution projective  $P_\bullet$  de  $M$ . On définit l'*homologie de l'algèbre augmentée* comme le quotient du noyau de l'application  $M \otimes_A P_n \rightarrow M \otimes_{\mathbf{A}} P_{n-1}$  par l'image de l'application  $M \otimes_{\mathbf{A}} P_{n-1} \rightarrow M \otimes_{\mathbf{A}} P_{n-2}$ . On la note  $H_n(\mathbf{A}, M)$ . On a donc :

$$H_n(\mathbf{A}, M) = \frac{\ker(M \otimes_A P_n \rightarrow M \otimes_{\mathbf{A}} P_{n-1})}{\text{Im}(M \otimes_{\mathbf{A}} P_{n-1} \rightarrow M \otimes_{\mathbf{A}} P_{n-2})}$$

**Définition 2.3.3.** Soit  $(\mathbf{A}, \epsilon)$  une algèbre augmentée. On définit la *série de Poincaré*  $P_{\mathbf{A}}(t)$  associée à l'algèbre  $\mathbf{A}$  :

$$P_{\mathbf{A}}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \dim(H_n(\mathbf{A}, \mathbb{K}))t^n$$

**Exemple 2.3.2.** Nous allons développer un exemple présenté par Anick dans [2]. Soit l'algèbre

$$\mathbf{A} = \langle x, y | xyxyx - yxy \rangle$$

Il y a une paire critique  $xyxyxyx$  qui est confluente. Pour  $n \geq 0$ , il y a une unique  $n$ -chaîne :  $x|w_n(yxyx, yx)$ .

Prenons l'augmentation

$$\begin{cases} \epsilon(x) = \epsilon(y) = 0 \\ \epsilon(1) = 1 \end{cases}$$

On calcule les bords et on obtient, pour  $n \geq 1$  :

$$\begin{aligned} \delta_0(x \otimes 1) &= 1 \otimes x \\ \delta_0(y \otimes 1) &= 1 \otimes y \\ \delta_1(x|yxyx \otimes 1) &= x \otimes yxyx - x \otimes yx \\ \delta_{2n}(x|w_{2n}(yxyx, yx) \otimes 1) &= x|w_{2n-1}(yxyx, yx) \otimes yx \\ \delta_{2n+1}(x|w_{2n+1}(yxyx, yx) \otimes 1) &= x|w_{2n}(yxyx, yx) \otimes (yxyx - yx) \end{aligned}$$

On note  $\overline{\delta}_n = \delta_n \otimes 1_{\mathbb{K}}$ . On obtient, pour  $n \geq 0$ ,

$$\begin{aligned} \overline{\delta}_0(x) &= 0 \\ \overline{\delta}_0(y) &= 0 \\ \overline{\delta}_1(x|yxyx) &= 0 \\ \overline{\delta}_{2n}(x|w_{2n}(yxyx, yx)) &= 0 \\ \overline{\delta}_{2n+1}(x|w_{2n+1}(yxyx, yx)) &= 0 \end{aligned}$$



On obtient donc l'homologie pour  $n \geq 1$  :

$$\begin{aligned}
H_0(\mathbf{A}, \mathbb{K}) &= \mathbb{K} \\
H_1(\mathbf{A}, \mathbb{K}) &= \mathbb{K}\langle x, y \rangle \\
H_2(\mathbf{A}, \mathbb{K}) &= \mathbb{K}\langle x|yxyx \rangle \\
H_{2n+1}(\mathbf{A}, \mathbb{K}) &= \mathbb{K}\langle x|w_{2n}(yxyx, yx) \rangle \\
H_{2n+2}(\mathbf{A}, \mathbb{K}) &= \mathbb{K}\langle x|w_{2n+1}(yxyx, yx) \rangle
\end{aligned}$$

Calculons maintenant la série de Poincaré associée :

$$P_{\mathbf{A}}(t) = 1 + 2t + t^2 + t^3 + \dots + t^n + \dots = t + \frac{1}{1+t}$$

**Exemple 2.3.3.** On considère la même algèbre que dans l'exemple précédent. Prenons maintenant l'augmentation définie par

$$\epsilon(xy) = \epsilon(1) = 1$$

Cela signifie que  $\epsilon(x) \neq 0$  et  $\epsilon(y) = \frac{1}{\epsilon(x)} \neq 0$ . On calcule les bords et on obtient pour  $n \geq 1$  :

$$\begin{aligned}
\delta_0(x \otimes 1) &= 1 \otimes x - \epsilon(x)1 \otimes 1 \\
\delta_0(y \otimes 1) &= 1 \otimes y - \epsilon(y)1 \otimes 1 \\
\delta_1(x|yxyx \otimes 1) &= x \otimes yxyx + \epsilon(x)y \otimes xyx \\
\delta_{2n}(x|w_{2n}(yxyx, yx) \otimes 1) &= x|w_{2n-1}(yxyx, yx) \otimes (yx - 1) \\
\delta_{2n+1}(x|w_{2n+1}(yxyx, yx) \otimes 1) &= x|w_{2n}(yxyx, yx) \otimes yxyx
\end{aligned}$$

On note  $\overline{\delta}_n = \delta_n \otimes 1_{\mathbb{K}}$ . On obtient, pour  $n \geq 0$ ,

$$\begin{aligned}
\overline{\delta}_0(x) &= -\epsilon(x) \\
\overline{\delta}_0(y) &= -\epsilon(y) \\
\overline{\delta}_1(x|yxyx) &= 0 \\
\overline{\delta}_{2n}(x|w_{2n}(yxyx, yx)) &= -x|w_{2n-1}(yxyx, yx) \\
\overline{\delta}_{2n+1}(x|w_{2n+1}(yxyx, yx)) &= 0
\end{aligned}$$

On obtient donc l'homologie pour  $n \geq 1$  :

$$\begin{aligned}
H_0(\mathbf{A}, \mathbb{K}) &= \mathbb{K} \\
H_1(\mathbf{A}, \mathbb{K}) &= \mathbb{K}\langle \epsilon(y)x - \epsilon(x)y \rangle \\
H_2(\mathbf{A}, \mathbb{K}) &= 0 \\
H_{2n+1}(\mathbf{A}, \mathbb{K}) &= 0 \\
H_{2n+2}(\mathbf{A}, \mathbb{K}) &= 0
\end{aligned}$$

Calculons maintenant la série de Poincaré associée :

$$P_{\mathbf{A}}(t) = 1 + t$$

On constate bien que deux augmentations différentes mènent à deux résolutions d'Anick différentes.



**Exemple 2.3.4.**

$$\mathbf{A} = \langle x, y, z | x^2 + yz = 0, x^2 + azy = 0 \rangle$$

où  $a$  est un élément non nul du corps  $\mathbb{K}$ .

On se donne l'ordre sur les lettres  $x < y < z$  qu'on étend en l'ordre deglex sur l'algèbre  $\mathbb{K}\langle x, y, z \rangle$ . On calcule la base de Gröbner de l'idéal des relations :

$$\begin{aligned} yz &\implies -x^2 \\ yz &\implies -\frac{1}{a}x^2 \\ zx^2 &\implies \frac{1}{a}x^2z \\ yx^2 &\implies ax^2y \end{aligned}$$

On peut alors calculer les  $n$ -chaînes. Pour  $n \geq 1$ , on a :

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_{-1} &= \{1\} \\ \mathcal{C}_0 &= \{x, y, z\} \\ \mathcal{C}_n &= \{w_{n+1}(y, z), w_{n+1}(z, y), w_n(y, z)|x^2, w_n(z, y)|x^2\} \end{aligned}$$

On se donne l'augmentation

$$\begin{cases} \epsilon(1) = 1 \\ \epsilon(x) = \epsilon(y) = \epsilon(z) = 0 \end{cases}$$

On peut alors calculer les bords. Commençons par l'application  $\delta_0$  :

$$\delta_0(x \otimes 1) = 1 \otimes x, \quad \delta_0(y \otimes 1) = 1 \otimes y, \quad \delta_0(z \otimes 1) = 1 \otimes z.$$

On peut ensuite calculer le bord  $\delta_1$  :

$$\begin{aligned} \delta_1(y|z \otimes 1) &= y \otimes z + x \otimes x, \\ \delta_1(z|y \otimes 1) &= z \otimes y + \frac{1}{a}x \otimes x, \\ \delta_1(y|x^2 \otimes 1) &= y \otimes x^2 - ax \otimes xy, \\ \delta_1(z|x^2 \otimes 1) &= z \otimes x^2 - \frac{1}{a}x \otimes xz. \end{aligned}$$

Pour calculer le bord  $\delta_{n+1}$  avec  $n \geq 1$ , on pose  $\Lambda = w_n(y, z)$  ou  $w_n(z, y)$  tel que  $\Lambda = \dots|z|y$ . On pose  $\Lambda' = \dots|y|z$  de façon similaire. On a alors :

$$\begin{aligned} \delta_{n+1}(\Lambda|z|y \otimes 1) &= \Lambda|z \otimes y + \frac{1}{a}\Lambda|x^2 \otimes 1, \\ \delta_{n+1}(\Lambda'|y|z \otimes 1) &= \Lambda'|y \otimes z + \Lambda'|x^2 \otimes 1, \\ \delta_{n+1}(\Lambda|z|x^2 \otimes 1) &= \Lambda|z \otimes x^2 - \frac{1}{a}\Lambda|x^2 \otimes z, \\ \delta_{n+1}(\Lambda'|y|x^2 \otimes 1) &= \Lambda'|y \otimes x^2 - a\Lambda'|x^2 \otimes y. \end{aligned}$$



### 2.3.5 Interprétation en terme de systèmes convergents

Dans [19], Squier associe à tout monoïde une résolution partielle qu'il calcule à partir d'un système de réécriture convergent de mots, de même que grace à la résolution d'Anick nous associons une résolution calculée à partir d'un système de réécriture linéaire convergent. Dans [11], Y. Guiraud et P. Malbos interprètent les résultats obtenus par Squier en terme de polygraphes.

Nous allons illustrer ce lien entre systèmes de réécriture et résolution d'Anick associée.

**Exemple 2.3.5.** Étudions l'algèbre  $\mathbf{A}$  définie par :

$$\mathbf{A} = \langle x, y | xy - x^2, y^2 - x^2 \rangle$$

Pour cela, on se donne l'ordre sur les lettres  $x < y$  qu'on étend en un ordre monomial par l'ordre deglex. On se donne également l'augmentation :

$$\epsilon(x) = \epsilon(y) = 0 \text{ et } \epsilon(1) = 1$$

La base de Gröbner est constituée de trois règles de réécriture :

$$\begin{array}{ccc} xy & \xrightarrow{\alpha} & x^2 \\ y^2 & \xrightarrow{\beta} & x^2 \\ yx^2 & \xrightarrow{\gamma} & x^3 \end{array}$$

Calculons maintenant la résolution d'Anick jusqu'aux 3-chaînes. Pour cela, on commence par déterminer les  $n$ -chaînes :

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_{-1} &= \{1\} \\ \mathcal{C}_0 &= \{x, y\} \\ \mathcal{C}_1 &= \{x|y, y|y, y|x^2\} \\ \mathcal{C}_2 &= \{x|y|y, x|y|x^2, y|y|y, y|y|x^2, y|x^2|y\} \\ \mathcal{C}_3 &= \{x|y|y|y, x|y|y|x^2, x|y|x^2|y, y|y|y|y, y|y|y|x^2, y|y|x^2|y, y|x^2|y|y, y|x^2|y|x^2\} \end{aligned}$$

Déterminons maintenant les applications  $\delta_0, \delta_1, \delta_2$  et  $\delta_3$  dans la résolution d'Anick. Nous ne donnerons ici que les résultats. Sur  $\mathcal{C}_0 = \{x, y\}$ , on obtient :

$$\delta_0(x \otimes 1) = 1 \otimes x, \quad \delta_0(y \otimes 1) = 1 \otimes y.$$

Sur  $\mathcal{C}_1 = \{x|y, y|y, y|x^2\}$ , on obtient :

$$\begin{aligned} \delta_1(x|y \otimes 1) &= x \otimes y - x \otimes x, \\ \delta_1(y|y \otimes 1) &= y \otimes y - x \otimes x, \\ \delta_1(y|x^2 \otimes 1) &= y \otimes x^2 - x \otimes x^2. \end{aligned}$$

Sur  $\mathcal{C}_2 = \{x|y|y, x|y|x^2, y|y|y, y|y|x^2, y|x^2|y\}$ , on obtient :

$$\begin{aligned} \delta_2(x|y|y \otimes 1) &= x|y \otimes y, \\ \delta_2(x|y|x^2 \otimes 1) &= x|y \otimes x^2, \\ \delta_2(y|y|y \otimes 1) &= y|y \otimes y - y|x^2 \otimes 1, \\ \delta_2(y|y|x^2 \otimes 1) &= y|y \otimes x^2 - y|x^2 \otimes x, \\ \delta_2(y|x^2|y \otimes 1) &= y|x^2 \otimes y - y|x^2 \otimes x. \end{aligned}$$



On pose  $\overline{\delta_n} = \delta_n \otimes 1_{\mathbb{K}}$ . On calcule le noyau de  $\overline{\delta_1}$  :

$$\ker(\overline{\delta_1}) = \mathbb{K}\langle \mathcal{C}_1 \rangle = \mathbb{K}\langle x|y, y|y, y|x^2 \rangle$$

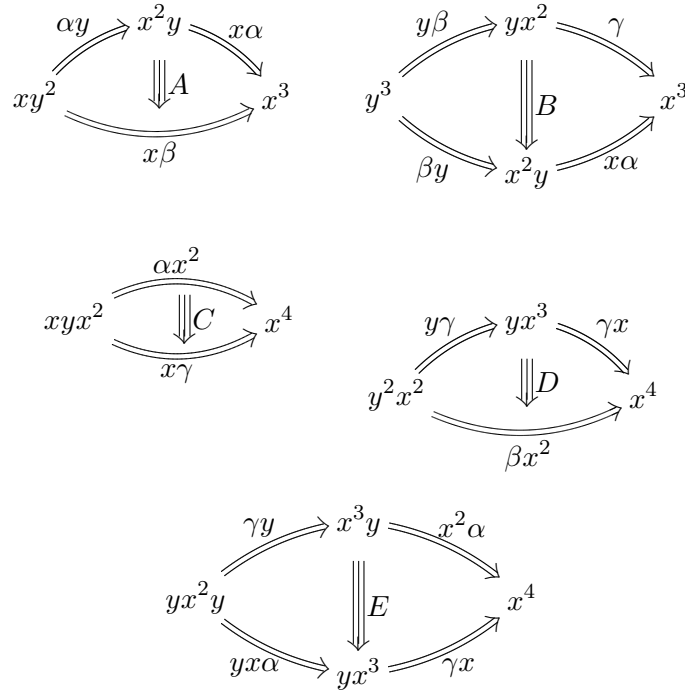
et l'image de  $\overline{\delta_2}$  :

$$\text{Im}(\overline{\delta_2}) = \mathbb{K}\langle y|x^2 \rangle.$$

Ce qui nous permet d'en déduire le groupe d'homologie :

$$H_2(\mathbf{A}, \mathbb{K}) = \mathbb{K}\langle x|y, y|y \rangle$$

Considérons désormais ce qu'il se passe au niveau des paires critiques. On construit les 3-cellules qui correspondent aux diagrammes de confluence des paires critiques.



La 3-cellule  $A$  correspond à la 2-chaîne  $x|y|y$ ,  $B$  à  $y|y|y$ ,  $C$  à  $x|y|x^2$ ,  $D$  à  $y|y|x^2$  et  $E$  à  $y|x^2|y$ .

On constate que la règle de réécriture  $\gamma$  se trouve dans le bord de la 3-cellule  $B$  sans contexte. La règle de réécriture  $\gamma$  de source  $y|x^2$  peut se simplifier par réduction homotopique avec la 3-cellule  $B$ . La règle de réécriture  $\gamma$  correspond à la 1-chaîne  $y|x^2$ .

Poursuivons le calcul de la résolution d'Anick. Sur

$$\mathcal{C}_3 = \{x|y|y|y, x|y|y|x^2, x|y|x^2|y, y|y|y|y, y|y|y|x^2, y|y|x^2|y, y|x^2|y|y, y|x^2|y|x^2\}$$

$$\begin{aligned} \delta_3(x|y|y|y \otimes 1) &= x|y|y \otimes y - x|y|x^2 \otimes 1 \\ \delta_3(x|y|y|x^2 \otimes 1) &= x|y|y \otimes x^2 - x|y|x^2 \otimes x \\ \delta_3(x|y|x^2|y \otimes 1) &= x|y|x^2 \otimes y - x|y|x^2 \otimes x \\ \delta_3(y|y|y|y \otimes 1) &= y|y|y \otimes y - y|y|x^2 \otimes 1 + y|x^2|y \otimes 1 \\ \delta_3(y|y|y|x^2 \otimes 1) &= y|y|y \otimes x^2 - y|y|x^2 \otimes x \\ \delta_3(y|y|x^2|y \otimes 1) &= y|y|x^2 \otimes y - y|y|x^2 \otimes x \\ \delta_3(y|x^2|y|y \otimes 1) &= y|x^2|y \otimes y \\ \delta_3(y|x^2|y|x^2 \otimes 1) &= y|x^2|y \otimes x^2 \end{aligned}$$



On peut calculer le noyau de l'application  $\overline{\delta}_2$  :

$$\ker(\overline{\delta}_2) = \mathbb{K}\langle x|y|y, x|y|x^2, y|y|x^2, y|x^2|y \rangle$$

et l'image de l'application  $\overline{\delta}_3$  :

$$\text{Im}(\overline{\delta}_3) = \mathbb{K}\langle x|y|y, y|x^2|y - y|y|x^2 \rangle$$

qui proviennent de :

$$\overline{\delta}_3(x|y|y|y) = -x|y|x^2, \quad \overline{\delta}_3(y|y|y|y) = -y|y|x^2 + y|x^2|y.$$

Ce qui donne le groupe d'homologie :

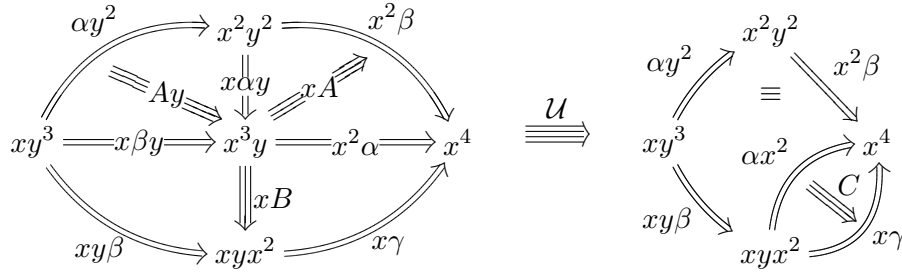
$$H_3(\mathbf{A}, \mathbb{K}) = \mathbb{K}\langle x|y|x^2, y|y|x^2 + y|x^2|y \rangle.$$

Commençons par considérer le noyau  $\ker(\overline{\delta}_2)$ . Le noyau est l'espace vectoriel engendré par les 2-chaînes qui correspondent aux 3-cellules qu'on n'a pas simplifiées par réduction homotopique dans le calcul de  $H_2(\mathbf{A}, \mathbb{K})$ . On avait réduit la 3-cellule  $B$  avec la règle  $\gamma$ , il reste donc les 3-cellules  $A, C, D$  et  $E$ . Ces 3-cellules correspondent aux 2-chaînes  $x|y|y, x|y|x^2, y|y|x^2$  et  $y|x^2|y$ .

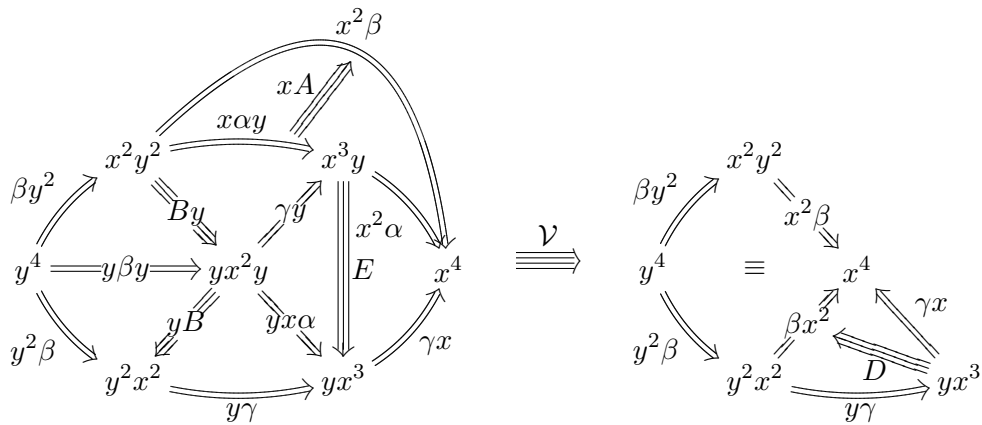
On considère maintenant l'image  $\text{Im}(\overline{\delta}_3)$ . On a vu que l'application  $\overline{\delta}_3$  n'est pas nulle sur  $\mathbb{K}\langle x|y|y|y, y|y|y|y \rangle$  :

$$\overline{\delta}_3(x|y|y|y) = -x|y|x^2, \quad \overline{\delta}_3(y|y|y|y) = -y|y|x^2 + y|x^2|y.$$

Considérons maintenant ce qu'il se passe dans le système de réécriture au niveau des triplets critiques  $x|y|y|y$  et  $y|y|y|y$ .



La 3-cellule  $C$  est dans le bord de la 4-cellule  $\mathcal{U}$  sans contexte. Par conséquent, on peut réduire simultanément les deux cellules. La 3-cellule  $C$  correspond à la 2-chaîne  $x|y|x^2$ .



Les 3-cellules  $E$  et  $D$  apparaissent simultanément dans le bord de la 4-cellule  $\mathcal{V}$ , il est donc possible de réduire l'une ou l'autre en même temps que  $\mathcal{V}$ . De plus, les 3-cellules  $E$  et  $D$  correspondent aux 2-chaînes  $y|x^2|y$  et  $y|y|x^2$ .

Les 3-cellules qui peuvent se réduire avec des 4-cellules sont celles qu'on retrouve dans  $H_3(\mathbf{A}, \mathbb{K})$ .



### 2.3.6 Cas des algèbres monomiales

**Définition 2.3.4.** Une algèbre  $\mathbf{A}(X, R)$  est dite monomiale, si tous les relations dans  $R$  sont des monômes. Cela signifie que

$$R \subset X^*$$

**Proposition 2.3.1.** Soit  $\mathbf{A}(X, R)$  une algèbre monomiale. L'application

$$\begin{cases} \epsilon(x) = 0 \text{ pour } x \neq 1, \\ \epsilon(1) = 1 \end{cases}$$

est une augmentation de l'algèbre  $\mathbf{A}$ . En reprenant les notations précédemment introduites, pour  $n \geq 0$ , les applications dans la résolution d'Anick sont :

$$\begin{aligned} \delta_n : \mathbb{K}\langle \mathcal{C}_n \rangle \otimes \mathbf{A} &\rightarrow \mathbb{K}\langle \mathcal{C}_{n-1} \rangle \otimes \mathbf{A} \\ f|t \otimes 1 &\mapsto f \otimes t \end{aligned}$$

*Démonstration.* On montre la propriété 2.3.1 par récurrence sur l'indice  $n$ . Tout d'abord, par définition de la résolution d'Anick :

$$\delta_0(x \otimes 1) = x - \eta\epsilon(x) = x$$

Supposons que l'application  $\delta_{n-1}$  soit de la forme attendue. Soit  $g|t'|t$  une  $n$ -chaîne. Par définition de la résolution d'Anick, on obtient :

$$\begin{aligned} \delta_n(g|t'|t) &= g|t' \otimes t - \sigma_{n-1}\delta_{n-1}(g|t' \otimes t) \\ &= g|t' \otimes t - \sigma_{n-1}(g \otimes t't) \end{aligned}$$

Or le monôme  $t't$  est réductible par définition d'une  $n$ -chaîne. Comme l'algèbre est monomiale, le terme  $t't$  se réduit en 0, ce qui donne l'étape de récurrence.  $\square$



## Chapitre 3

# Confluence des opérateurs

Dans ce chapitre, nous détaillerons la seconde des approches considérées (Berger). Nous commencerons par introduire les opérateurs de réduction. Nous construirons ensuite une structure de treillis sur l'ensemble des opérateurs de réduction. Cela nous permettra de définir la confluence des opérateurs de réduction. Ensuite, nous mettrons en évidence le lien entre confluence des opérateurs et confluence des systèmes de réécriture. Enfin, nous appliquerons cela au cas des algèbres quadratiques, ce qui nous permettra de définir les bases  $X$ -canoniques.

### 3.1 Opérateurs de réduction

On se donne un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel  $V$  de dimension finie  $r$ . On s'en donne une base  $(X, <)$  totalement ordonnée, ses éléments sont appelés  $X$ -générateurs. On peut étendre cet ordre à tout l'espace  $V$ . On définit un ordre  $<$  sur  $V$  : pour deux éléments  $a, b \in V$

$$b < a \text{ si } b = 0 \text{ ou } hg(b) < hg(a)$$

avec  $hg(a)$  le plus grand  $X$ -générateur de  $a$  dans sa décomposition dans la base  $X$ . Bien que l'ordre  $<$  sur la base  $X$  soit total, l'ordre  $<$  engendré sur l'espace  $V$  est partiel.

**Définition 3.1.1.** Une application linéaire  $T : V \rightarrow V$  est appelée *opérateur de  $X$ -réduction*, si elle vérifie les deux propriétés suivantes :

1.  $T^2 = T$ ,
2. pour un élément  $x$  de la base  $X$ , soit  $T(x) = x$  et  $x$  est alors appelé  $T$ -réduit, ou soit  $T(x) < x$  et  $x$  est alors appelé  $T$ -non réduit.

On note  $\mathcal{L}_X(V)$  l'ensemble des opérateurs de  $X$ -réduction. Pour un opérateur de  $X$ -réduction  $T$ , on définit  $\text{Red}(T)$  l'espace vectoriel engendré par les éléments  $T$ -réduits de la base  $X$ . De façon similaire, on définit  $\text{NRed}(T)$  l'espace vectoriel engendré par les éléments  $T$ -non réduits de la base  $X$ . On a alors

$$V = \text{Red}(T) \oplus \text{NRed}(T)$$

**Proposition 3.1.1.** Soit  $T$  une  $X$ -réduction.

1.  $\text{Red}(T) = \text{Im}(T)$ .
2.  $V = \ker(id_V - T) \oplus \ker T$ .
3.  $id_V - T : \text{NRed}(T) \rightarrow \ker T$  est un isomorphisme.



*Démonstration.* Pour montrer que  $\text{Red}(T) = \text{Im}(T)$ , on montre les deux inclusions. Si  $x$  est un élément réduit de la base  $X$ , alors  $x = T(x)$  donc l'élément  $x$  est sa propre image par  $T$ . Réciproquement, si le vecteur de base  $x$  est dans l'image de  $T$ , alors il existe un élément  $y$  de l'espace vectoriel  $V$  tel que  $x = T(y)$ . Comme on sait que  $T^2 = T$ , on a donc :

$$T(x) = T^2(y) = T(y) = x$$

D'où l'égalité

$$\text{Red}(T) = \text{Im}(T)$$

Comme  $T^2 = T$  et  $\text{Im}(T) = \text{Red}(T)$ , l'opérateur de  $X$ -réduction  $T$  est une projection de  $V$  sur  $\text{Red}(T)$ . Les deux propriétés suivantes en découlent directement.  $\square$

**Proposition 3.1.2.** Soit  $T$  une  $X$ -réduction.

1. Pour  $a, b \in V$ , si  $a < b$ , alors  $T(a) < b$ .
2. Si  $T$  et  $U$  sont deux  $X$ -réductions telles que  $\ker(U) \subset \ker(T)$ , alors  $\text{Red}(T) \subset \text{Red}(U)$ .

*Démonstration.* Prenons deux éléments  $a$  et  $b$  de l'espace vectoriel  $V$  tels que  $a < b$ . Soit  $T(a) = a$  si l'élément  $a$  est dans l'espace vectoriel  $\text{Red}(T)$ , soit  $T(a) < a$  sinon. Par conséquent, on a bien  $T(a) < b$ .

Démontrons maintenant le deuxième point. Prenons un élément  $x$  de  $\text{Red}(T)$  et supposons qu'il soit également dans  $\text{NRed}(U)$ . Comme l'application  $U$  est un opérateur de  $X$ -réduction, on sait que  $U^2 = U$ . Par conséquent, l'élément  $x - U(x)$  est dans le noyau de l'opérateur  $U$ , donc par hypothèse dans celui de l'opérateur  $T$ . On sait donc que  $x = T(x) = TU(x)$ . De plus, on a supposé que l'élément  $x$  était dans  $\text{NRed}(U)$ , donc  $U(x) < x$ , et donc  $T(U(x)) < x$  par la propriété précédente.

On a donc à la fois  $T(U(x)) < x$  et  $T(U(x)) = x$ . Ceci n'est possible que si  $x = 0$ .

On vient de démontrer que  $\text{Red}(T) \cap \text{NRed}(U) = \{0\}$ , ce qui démontre le dernier point : il suffit de décomposer un élément de  $\text{Red}(T)$  comme la somme d'un élément de  $\text{Red}(U)$  et d'un élément de  $\text{NRed}(U)$ .  $\square$

**Théorème 3.1.1.** Soit  $\mathcal{L}(V)$  l'ensemble des sous-espaces de  $V$ . L'application

$$\begin{aligned} \theta_X : \mathcal{L}_X(V) &\rightarrow \mathcal{L}(V) \\ T &\mapsto \ker(T) \end{aligned}$$

est une bijection.

*Démonstration.* Commençons par montrer l'injectivité. Si  $\ker(T) = \ker(U)$ , par la proposition précédente, on a aussi  $\text{Red}(T) = \text{Red}(U)$ , c'est-à-dire  $\text{Im}(T) = \text{Im}(U)$ . Les opérateurs  $T$  et  $U$  sont donc les mêmes projections. Donc  $T = U$ .

On montre maintenant la surjectivité. Prenons  $E$  sous-espace vectoriel de  $V$ . On définit  $X_1$  comme un sous-ensemble de la base  $X$  tel que l'espace engendré par  $X_1$  soit supplémentaire à  $E$  dans  $V$ . On définit ensuite l'opérateur  $T$  comme étant la projection de  $V$  sur le sous-espace  $\mathbb{K}\langle X_1 \rangle$  et dont le noyau est le sous-espace  $E$ . L'opérateur  $T$  ainsi construit convient bien.  $\square$

On pourra se référer à [9] pour une introduction à la théorie des treillis. L'espace  $\mathcal{L}(V)$  muni des lois  $\subseteq$  (inclusion des espaces),  $+$  (addition des espaces),  $\cap$  (intersection des espaces) et de la relation d'ordre « être un sous-espace » est un treillis. On transporte cette structure sur l'espace  $\mathcal{L}_X(V)$  :

$$T \leq U \text{ si } \ker U \subseteq \ker T.$$



On définit également  $T \wedge U$  et  $T \vee U$  par

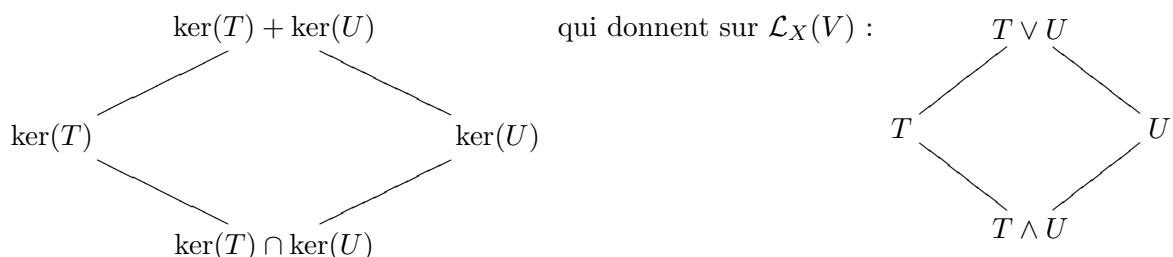
$$\ker(T \wedge U) = \ker(T) + \ker(U) \text{ et } \ker(T \vee U) = \ker(T) \cap \ker(U).$$

La bijectivité de l'application  $\theta_X$  garantit l'existence et l'unicité des opérateurs  $T \vee U$  et  $T \wedge U$  ainsi définis.

**Définition 3.1.2.** Soient  $V_1$  et  $V_2$  deux espaces vectoriels munis respectivement des ordres  $<_1$  et  $<_2$ . Un anti-isomorphisme  $f : V_1 \rightarrow V_2$  est un isomorphisme tel que, pour deux éléments  $v$  et  $w$  de  $V_1$ ,

$$\text{si } v <_1 w, \text{ alors } f(w) <_2 f(v)$$

Le morphisme  $\theta_X$  est en fait un anti-isomorphisme. On a les relations d'ordre suivantes sur  $\mathcal{L}(V)$  :



**Proposition 3.1.3.** Pour  $T$  et  $U$  deux  $X$ -réductions, on a :

1.  $0_V \leq T \leq id_V$ .
2.  $T \leq U$  si, et seulement si,  $TU = T$ .
3. si  $T \leq U$ , alors  $UT = TU$ .

*Démonstration.* On utilise systématiquement la bijectivité de l'application  $\theta_X$  qui nous permet de raisonner en termes de noyaux d'opérateurs de  $X$ -réduction plutôt qu'en termes d'opérateurs directement.

Pour le premier point, pour tout opérateur de on a :

$$\ker(0_V) + \ker(T) = V = \ker(0_V) \text{ et } \ker(T) + \ker(id_V) = \ker(T)$$

Montrons d'abord le sens indirect du second point. Si  $\ker(TU) = \ker(T)$ , comme  $\ker(U) \subset \ker(TU)$ , alors  $\ker(U) \subset \ker(T)$ .

On s'intéresse maintenant au sens direct. Supposons que  $\ker(U) \subset \ker(T)$ . Prenons un élément  $x$  de  $\ker(T)$ , il s'écrit alors  $x = U(y) + z$  où  $z$  est un élément de  $\ker(U)$ . Comme  $U^2 = U$ , on a donc  $TU(x) = TU(y)$ . Comme on a l'inclusion  $\ker(U) \subset \ker(T)$ , on sait également que  $T(z) = 0$ . Or, on a également

$$0 = T(x) = TU(y) + T(z) = TU(y) = TU(x),$$

on sait donc que  $\ker(T) \subset \ker(TU)$ .

Réciproquement, donnons nous un élément  $x$  de  $\ker(TU)$ , il s'écrit  $x = U(y) + z$  où  $z$  est un élément de  $\ker(U) \subset \ker(T)$ . Par conséquent :

$$T(x) = TU(y) + T(z) = TU(y) = TU(y) + TU(z) = TU(x) = 0.$$

Ceci prouve l'implication réciproque  $\ker(TU) \subset \ker(T)$ , et donc  $TU = T$ .



Pour démontrer le dernier point, il ne reste plus qu'à montrer que si  $\ker(U) \subset \ker(T)$ , alors

$$\ker(UT) = \ker(T).$$

On a bien entendu l'inclusion  $\ker(T) \subset \ker(UT)$ . Prenons maintenant un élément  $x$  de  $\ker(UT)$ , cela signifie que  $T(x)$  est dans le sous-espace  $\ker(U) \subset \ker(T)$ . Donc  $0 = T^2(x) = T(x)$  et donc l'élément  $x$  est aussi dans le noyau de l'opérateur  $T$ .  $\square$

On introduit l'application

$$\begin{aligned} \pi_X : \mathcal{L}_X(V) &\rightarrow \mathcal{P}(X) \\ T &\mapsto \text{Red}(T) \end{aligned}$$

où  $\mathcal{P}(X)$  est l'ensemble des parties de  $X$ .

On introduit également

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_X^{tri}(V) &= \{T \in \mathcal{L}_X(V) \mid \text{NRed}(T) = \ker(T)\}, \\ &= \{T \in \mathcal{L}_X(V) \mid [T]_X \text{ est diagonale} \}, \end{aligned}$$

où  $[T]_X$  désigne la matrice de l'opérateur  $T$  dans la base  $X$ . Ces deux expressions de l'ensemble  $\mathcal{L}_X^{tri}(V)$  sont bien équivalentes. En effet, supposons que la matrice  $[T]_X$  est diagonale. Rappelons que cette matrice ne comporte que des 0 ou des 1 sur sa diagonale. Soit  $x$  un vecteur de la base  $X$ . Soit le vecteur  $x$  est  $T$ -réduit et donc  $T(x) = x$ , soit le vecteur  $x$  est non réduit et alors  $T(x) = 0$ . Par conséquent, on a bien  $\text{NRed}(T) = \ker T$ . Réciproquement, pour un vecteur  $x$  dans la base  $X$ , soit  $x$  est réduit et alors  $T(x) = x$ , soit  $x$  est non-réduit et alors par hypothèse  $T(x) = 0$ . La matrice  $[T]_X$  est alors bien diagonale.

**Proposition 3.1.4.** 1. Pour  $T$  et  $U$  deux  $X$ -réductions, si  $T \leq U$  alors  $\text{Red}(T) \subseteq \text{Red}(U)$

2. L'application  $\pi_X$  est surjective

3. L'application  $\pi_X$  est non injective

*Démonstration.* Pour le premier point, on a montré précédemment que si  $T \leq U$ , alors  $TU = UT = T$ . Par conséquent, pour un élément  $x$  du sous-espace  $\text{Red}(T)$  :

$$x = T(x) = UT(x) = U(x).$$

Donc  $\text{Red}(T) \subset \text{Red}(U)$ .

On considère maintenant le second point. Pour montrer la surjectivité, on se donne un sous-ensemble  $P$  de la base  $X$ . On définit l'application linéaire  $T$  sur les vecteurs  $x$  dans la base  $X$  :

$$\begin{cases} T(x) = x \text{ si } x \in P \\ T(x) = 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

Un tel morphisme  $T$  est bien un opérateur de  $X$ -réduction. Par conséquent, l'application  $\pi_X$  est surjective. En fait, l'application  $\pi_X$  restreinte à  $\mathcal{L}_X^{tri}(V)$  est un isomorphisme entre l'ensemble  $\mathcal{L}_X^{tri}(V)$  et le treillis  $\mathcal{P}(X)$ .

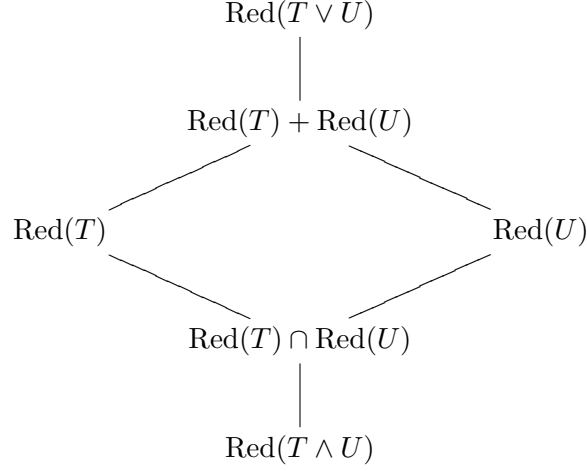
Pour le troisième point, considérons les deux opérateurs de  $X$ -réduction  $T$  et  $U$  donnés par leurs matrices dans la base  $X = \{x < y\}$  :

$$[T]_X = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad [U]_X = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

On a alors  $\text{Red}(T) = \text{Red}(U) = \mathbb{K}\langle x \rangle$ , mais les deux opérateurs sont distincts.  $\square$



Une conséquence est que l'application  $\pi_X$  n'est pas un morphisme de treillis et on a juste pour  $T$  et  $U$  deux opérateurs de  $X$ -réductions :



**Exemple 3.1.1.** Nous avons indiqué que l'application  $\pi_X$  n'est pas un morphisme de treillis. Nous allons en donner un contre-exemple. Considérons l'algèbre

$$\mathbf{A} = \langle x, y | xy - x^2, y^2 - x^2 \rangle$$

On note  $V$  l'espace engendré par les générateurs  $x$  et  $y$  et  $E$  le sous-espace vectoriel de  $V^{\otimes 2}$  engendré par les deux relations  $xy - x^2$  et  $y^2 - x^2$ . On se donne l'ordre  $x < y$  qu'on peut étendre à tout l'espace vectoriel  $T(V)$ . On pose

$$X^{(2)} = \{x \otimes y | x, y \in X\} \quad \text{et} \quad X^{(3)} = \{x \otimes y \otimes z | x, y, z \in X\}.$$

Les ensembles  $X^{(2)}$  et  $X^{(3)}$  sont des bases respectivement de  $V^{\otimes 2}$  et  $V^{\otimes 3}$ . On pose  $S$  l'opérateur de  $X^{(2)}$ -réduction dont le noyau est  $E$ . L'opérateur  $S$  est bien défini par la bijectivité de l'application  $\theta_{X^{(2)}}$ . On définit les opérateurs de  $X^{(3)}$ -réduction  $S_1 = S \otimes id_V$  et  $S_2 = id_V \otimes S$ .

Nous allons montrer que

$$\text{Red}(S_1 \wedge S_2) \subsetneq \text{Red}(S_1) \cap \text{Red}(S_2).$$

Calculons d'abord les noyaux des opérateurs  $S, S_1$  et  $S_2$  :

$$\begin{aligned}
\ker(S) &= \mathbb{K}\langle (xy - x^2), (y^2 - x^2) \rangle, \\
\ker(S_1) &= \mathbb{K}\langle (xyx - x^3), (xy^2 - x^2y), (y^2x - x^3), (y^3 - x^2y) \rangle, \\
\ker(S_2) &= \mathbb{K}\langle (x^2y - x^3), (xy^2 - x^3), (yxy - yx^2), (y^3 - yx^2) \rangle.
\end{aligned}$$

Comme l'opérateur  $S_1 \wedge S_2$  est défini par  $\ker(S_1 \wedge S_2) = \ker(S_1) + \ker(S_2)$ , on connaît :

$$\begin{aligned}
\ker(S_1 \wedge S_2) &= \mathbb{K}\langle (xyx - x^3), (xy^2 - x^2y), (x^2y - x^3), (xy^2 - x^3), (y^2x - x^3), (y^3 - x^2y), \\
&\quad (yxy - yx^2), (y^3 - yx^2) \rangle \\
&= \mathbb{K}\langle (xyx - x^3), (x^2y - x^3), (xy^2 - x^3), (y^2x - x^3), (y^3 - x^2y), (yxy - yx^2), (y^3 - yx^2) \rangle
\end{aligned}$$

Par conséquent,  $\dim(\text{Red}(S_1 \wedge S_2)) = 1$ .

On a également :

$$\begin{aligned}
\text{Red}(S) &= \mathbb{K}\langle x^2, yx \rangle \\
\text{Red}(S_1) &= \mathbb{K}\langle x^3, yx^2, x^2y, yxy \rangle \\
\text{Red}(S_2) &= \mathbb{K}\langle x^3, xyx, yx^2, y^2x \rangle \\
\text{Red}(S_1) \cap \text{Red}(S_2) &= \mathbb{K}\langle x^3, yx^2 \rangle
\end{aligned}$$



On a donc bien

$$\text{Red}(S_1 \wedge S_2) \subsetneq \text{Red}(S_1) \cap \text{Red}(S_2)$$

**Définition 3.1.3.** On a montré que l'application  $\pi_X$  n'était pas un morphisme de treillis, on peut donc écrire :

$$\begin{aligned} \text{Red}(T) \cap \text{Red}(U) &= \text{Red}(T \wedge U) \oplus \text{Obs}_{red}^{T,U} \\ (\text{Red}(T) + \text{Red}(U)) \oplus \text{Obs}_{amb}^{T,U} &= \text{Red}(T \vee U) \end{aligned}$$

Où  $\text{Obs}_{red}^{T,U}$  et  $\text{Obs}_{amb}^{T,U}$  sont appelés *espaces d'obstruction*.

**Proposition 3.1.5.** Pour  $T$  et  $U$  deux  $X$ -réductions, on a

$$\dim(\text{Obs}_{red}^{T,U}) = \dim(\text{Obs}_{amb}^{T,U}).$$

**Définition 3.1.4.** On appelle *défaut de confluence* du couple  $(T, U)$ , noté  $def_C(T, U)$  la dimension des espaces d'obstruction :

$$def_C(T, U) = \dim(\text{Obs}_{red}^{T,U}) = \dim(\text{Obs}_{amb}^{T,U}).$$

*Démonstration.* Il s'agit d'un simple calcul de dimensions en utilisant le fait que pour tout opérateur  $R$  de  $X$ -réduction, on a  $V = \ker(R) \oplus \text{Red}(R)$ .

$$\begin{aligned} \dim(V) + \dim(\text{Obs}_{\text{Red}()}^{T,U}) &= \dim(\text{Red}(T) \cap \text{Red}(U)) + \dim(\ker(T) + \ker(U)) \\ &= \dim(\text{Red}(T)) + \dim(\text{Red}(U)) - \dim(\text{Red}(T) + \text{Red}(U)) \\ &\quad + \dim(\ker(T)) + \dim(\ker(U)) - \dim(\ker(T) \cap \ker(U)) \\ &= 2\dim(V) - \dim(\text{Red}(T) + \text{Red}(U)) - \dim(\ker(T) \cap \ker(U)) \end{aligned}$$

On obtient donc :

$$\dim(\text{Red}(T) + \text{Red}(U)) - \dim(\ker(T) \cap \ker(U)) + \dim(\text{Obs}_{Red}^{T,U}) = \dim(V)$$

Ce qui donne

$$\dim(\text{Obs}_{Red}^{T,U}) = \dim(\text{Obs}_{amb}^{T,U})$$

□

## 3.2 Confluence des opérateurs

On considère un espace vectoriel  $V$  et une base totalement ordonnée  $X$  de  $V$ .

**Définition 3.2.1.** Pour  $T$  et  $U$  deux  $X$ -réductions,  $(T, U)$  est dit *confluent* si  $def_C(T, U) = 0$

**Proposition 3.2.1.** Pour  $T$  et  $U$  deux  $X$ -réductions :

1. Si  $TU = UT$ , alors  $(T, U)$  est confluent.
2. Si  $(T, U)$  est confluent et  $\text{Red}(T) \subseteq \text{Red}(U)$ , alors  $T \leq U$ .
3. Si  $T \neq U$  et si  $\text{Red}(T) = \text{Red}(U)$ , alors  $(T, U)$  n'est pas confluent.



*Démonstration.* Pour démontrer l'assertion 1, on calcule le défaut de confluence des opérateurs  $T$  et  $U$ . Tout d'abord, on montre que

$$TU = UT = T \wedge U$$

Il suffit donc de montrer que  $\ker(UT) = \ker(U) + \ker(T)$ . Prenons deux éléments  $x$  et  $y$  respectivement de  $\ker(U)$  et  $\ker(T)$ , on a alors :

$$UT(x + y) = UT(x) + UT(y) = TU(x) + 0 = 0.$$

Par conséquent, l'élément  $x + y$  est dans le noyau de l'application  $UT$ . Réciproquement, prenons un élément  $z$  de  $\ker(UT) = \ker(TU)$ , on peut écrire  $z = a + b + t$  où  $a$  et  $b$  sont dans les noyaux respectivement des opérateurs  $T$  et  $U$  et où  $t$  n'est pas dans  $\text{Red}(U) \cap \text{Red}(T)$ . On sait alors que l'élément  $t$  est  $T$  et  $U$ -réduit, par conséquent :

$$0 = TU(z) = TU(a + b + t) = 0 + 0 + TU(t) = t.$$

Ce qui nous donne l'égalité entre opérateurs cherchés. Montrons maintenant que

$$\text{Im}(UT) = \text{Im}(T) \cap \text{Im}(U)$$

Comme  $UT = TU$ , on sait que  $\text{Im}(UT) \subset \text{Im}(T) \cap \text{Im}(U)$ . Prenons maintenant un élément  $y$  dans l'intersection  $\text{Im}(T) \cap \text{Im}(U)$ . Un tel élément peut s'écrire  $T(x) = U(z) = y$ , et donc :

$$y = T(x) = T^2(x) = T(y) = TU(z) = UT(z).$$

Par conséquent, le défaut de confluence des opérateurs  $T$  et  $U$  est bien nul.

On montre maintenant l'assertion 2. Pour cela, on constate que par définition  $T \wedge U \leq T$ , or, on sait également que

$$\text{Red}(T \wedge U) = \text{Red}(U) \cap \text{Red}(T) = \text{Red}(T).$$

Comme de plus pour tout opérateur  $S$  de  $X$ -réduction  $V = \text{Red}(S) \oplus \ker(S)$ , on obtient donc  $\ker(T \wedge U) = \ker(T)$  et donc  $T \wedge U = T$ . Or, comme  $T \wedge U \leq U$ , on obtient le résultat souhaité.

L'assertion 3 s'obtient à partir de l'assertion suivante. Prenons deux opérateurs  $T$  et  $U$  tels que  $T \neq U$  et  $\text{Red}(T) = \text{Red}(U)$ , et supposons de plus qu'ils soient confluents. Par la propriété précédente, on obtient  $T \leq U$  et  $U \leq T$ , ce qui vient contredire  $T \neq U$ .  $\square$

### 3.3 Lien avec les systèmes de réécriture

On considère un espace vectoriel  $V$  et une base totalement ordonnée  $X$  de l'espace  $V$ . On se donne pour cette section un ensemble de  $X$ -réductions deux à deux distinctes sur  $V$  :

$$P = \{T_1, \dots, T_n\}$$

On peut lui associer une relation de réécriture  $\xRightarrow{P}$ . Soient deux éléments  $a$  et  $b$  de  $V$ . On dit que  $a$  se réécrit en  $b$  par  $P$  si il existe un indice  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$  tel que  $a \notin \text{Red}(T_i)$  et  $b = T_i(a)$ . On note

$$a \xRightarrow{P} b$$

Il suffit en fait de définir cette relation uniquement sur la base  $X$  pour l'obtenir sur tout l'espace vectoriel  $V$ .



**Proposition 3.3.1.** La relation de réécriture  $\xRightarrow{P}$  ainsi définie est terminante.

*Démonstration.* La relation de réécriture  $\xRightarrow{P}$  est engendrée par

$$\bigcup_{i=1}^n \{x - T_i(x) | x \in X \cap \text{NRed}(T_i)\}$$

On étend l'ordre total sur  $X$  en un ordre sur  $V$ . Soient  $b$  et  $c$  deux éléments de  $V$ , ils s'écrivent comme  $b = \sum_{i=1}^m b_i x_i$  et  $c = \sum_{i=1}^m c_i x_i$ . On dit que  $b < c$  s'il existe  $0 \leq k \leq m$  tel que pour tout  $j < k$ ,

$$b_j = 0 \text{ et } c_j = 0 \text{ et } b_k \neq 0 \text{ et } c_k = 0$$

Cet ordre sur  $V$  est bien-fondé car l'ordre sur  $X$  est total.

On considère maintenant un élément  $a$  de  $V = \text{Red}(T_i) \oplus \text{NRed}(T_i)$  tel que  $a$  ne soit pas dans  $\text{Red}(T_i)$ , cela signifie que  $a$  s'écrit comme  $a_R + a_N$  où  $a_R$  est dans  $\text{Red}(T_i)$  alors que  $a_N$  est un élément non nul de  $\text{NRed}(T_i)$ . On obtient donc

$$T_i(a) = a_R + T_i(a_N)$$

Comme l'ordre  $<$  sur  $V$  correspond à l'ordre initial sur  $X$ , et comme pour  $x \in X \cap \text{NRed}(T_i)$  on a  $T_i(x) < x$ , on obtient  $T_i(a_N) < a_N$ . Ceci donne donc  $T_i(a) < a$ . On en conclut donc que la relation de réécriture  $\xRightarrow{P}$  est bien terminante.  $\square$

**Définition 3.3.1.** Une  $P$ -composition est une application linéaire  $S : V \rightarrow V$  qui s'écrit comme la composition d'opérateurs de l'ensemble  $P$  :

$$S = T_{i_s} \dots T_{i_1}$$

où  $s \geq 1$ ,  $1 \leq i_k \leq n$  pour  $k \in \llbracket 1, s \rrbracket$ .

**Définition 3.3.2.** On se donne deux  $P$ -compositions  $S = T_{i_s} \dots T_{i_1}$  et  $S' = T_{j_t} \dots T_{j_1}$ . On dit que la  $P$ -composition  $S'$  est *incluse* dans  $S$  si  $t \leq s$  et, pour tout  $k \in \llbracket 1, t \rrbracket$ , on a  $i_k = j_k$ .

**Exemple 3.3.1.** Donnons-nous  $P = \{T_1, T_2, T_3, T_4\}$  un ensemble de  $X$ -réductions. On définit trois  $P$ -compositions :

$$S = T_3 T_4 T_2 T_3 T_1 \quad S' = T_2 T_3 T_1 \quad \text{et} \quad S'' = T_4 T_3 T_1$$

La  $P$ -composition  $S'$  est incluse dans  $S$ , alors que ce la  $P$ -composition  $S''$  n'est pas incluse dans  $S$ .

**Proposition 3.3.2.** Soient deux éléments  $a$  et  $b$  dans l'espace vectoriel  $V$ . L'élément  $a$  se réduit en l'élément  $b$  par  $P$  si, et seulement si, il existe une  $P$ -composition  $S$  telle que  $S(a) = b$ .

*Démonstration.* Il s'agit d'une conséquence directe de la définition de la relation de réécriture.  $\square$

On pose

$$\text{Red}(P) = \bigcap_{i=1}^n \text{Red}(T_i)$$

On avait défini l'espace d'obstruction de deux opérateurs. On étend cette définition au cas général :

$$\text{Red}(P) = \text{Red}(T_1 \wedge \dots \wedge T_n) \oplus \text{Obs}_{\text{Red}}^P$$



**Proposition 3.3.3.** Un élément  $b$  de l'espace  $V$  est une forme normale pour la relation de réécriture  $\xrightarrow{P}$  de l'élément  $a$  si, et seulement si, il existe une  $P$ -composition  $S$  telle que  $S(a) = b$  et  $b \in \text{Red}(P)$ .

*Démonstration.* Un élément  $b$  de l'espace  $V$  est une forme normale de l'élément  $a$  si, et seulement si,  $a \xrightarrow{P}^* b$  et  $b$  est  $T_i$ -réduit, pour tous les indices  $1 \leq i \leq n$ . La première condition est équivalente à l'existence d'une  $P$ -composition  $S$  telle que  $S(a) = b$  et la deuxième condition est équivalente à  $b \in \text{Red}(P)$   $\square$

**Proposition 3.3.4.** Soit une  $P$ -composition  $S$ , alors

$$\text{Red}(P) \subset \text{Im}(S)$$

*Démonstration.* On écrit  $S = T_{i_s} \dots T_{i_1}$ . Prenons maintenant un élément  $x$  dans  $\text{Red}(P)$ . En particulier,  $x$  est dans chacun des sous-espaces  $\text{Red}(T_j)$  où  $1 \leq j \leq n$ , ce qui s'écrit également  $T_j(x) = x$ . Par conséquent  $S(x) = x$ , et donc l'élément  $x$  est dans  $\text{Im}(S)$ .  $\square$

**Exemple 3.3.2.** La réciproque est fautive en général. Prenons par exemple la base  $X = \{x, y, z\}$  et les deux opérateurs de  $X$  réductions  $T_1$  et  $T_2$  tels que  $T_1(x) = y$ ,  $T_2(y) = z$  et que les autres vecteurs de la base  $X$  restent inchangés. On définit alors l'ensemble  $P = \{T_1, T_2\}$  et une  $P$ -composition  $S = T_1$ . On a alors  $\text{Red}(P) = \{z\}$  et  $\text{Red}(S) = \{y, z\}$ .

**Définition 3.3.3.** Une  $P$ -composition  $S$  est dite *complète* si  $\text{Red}(P) = \text{Im}(S)$ .

**Proposition 3.3.5.** Soit  $S$  une  $P$ -composition. La  $P$ -composition  $S$  est complète si, et seulement si, pour tout entier  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ , on a  $T_i S = S$ .

*Démonstration.* Commençons par montrer l'implication directe. Soient  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$  et un élément  $x$  de l'espace  $V$ . Comme la  $P$ -composition  $S$  est complète, on sait que  $\text{Im}(S) = \text{Red}(P)$ , donc  $S(x) \in \text{Red}(T_i)$ . Ce qui donne  $T_i S(x) = S(x)$ .

Réciproquement, prenons un élément  $y$  dans l'image de  $S$  :  $y = S(x)$ . On a donc que pour tout entier  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ ,  $T_i S(x) = S(x)$  et donc  $T_i(y) = y$ . Par conséquent,  $y \in \text{Red}(T_i)$  pour tout  $1 \leq i \leq n$ , et donc  $y \in \text{Red}(P)$ .  $\square$

**Proposition 3.3.6.** Soit une  $P$ -composition complète  $S$ . La  $P$ -composition  $S$  est un opérateur de  $X$ -réduction tel que  $\text{Red}(S) = \text{Red}(P)$  et  $S \geq T_1 \wedge \dots \wedge T_n$ .

*Démonstration.* Commençons par montrer qu'il s'agit bien d'un opérateur de  $X$ -réduction. On peut écrire  $S = T_{i_s} \dots T_{i_1}$ . Par la propriété 3.3.5, on a bien  $S^2 = S$ . De plus, prenons un élément  $x$  de la base  $X$ . Si  $x$  est  $P$ -réduit, alors  $x$  est dans l'image de  $S$  et peut donc s'écrire  $x = S(y)$ . Ceci donne

$$S(x) = S^2(y) = S(y) = x.$$

Si  $x$  n'est pas  $P$ -réduit, alors, il existe  $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$  tel que

$$T_{i_1}(x) = T_{i_2}(x) = \dots = T_{i_{k-1}}(x) = x \quad \text{et} \quad T_{i_k}(x) < x.$$

Par conséquent  $S(x) < x$ . Donc la  $P$ -composition complète  $S$  est bien un opérateur de  $X$ -réduction tel que  $\text{Red}(S) = \text{Red}(P)$ .

Il reste à montrer que  $\ker(S) \subset \ker(T_1 \wedge \dots \wedge T_n) = \ker(T_1) + \dots + \ker(T_n)$ . Pour tout opérateur de  $X$ -réduction  $T$ , le noyau  $\ker(T)$  est engendré par les éléments  $x - T(x)$  où  $x$  est un élément non  $T$ -réduit de la base  $X$ . On obtient pour un élément  $x$  non  $S$ -réduit dans la base  $X$  :

$$\begin{aligned} x - S(x) &= x - T_{i_s} \dots T_{i_1}(x) \\ &= \sum_{k=1}^s T_{i_{k-1}} \dots T_{i_1}(x) - T_{i_k} \dots T_{i_1}(x) \end{aligned}$$



Chaque élément de la somme  $T_{i_{k-1}} \dots T_{i_1}(x) - T_{i_k} \dots T_{i_1}(x)$  est dans le noyau de  $T_{i_k}$ , ce qui donne le résultat.  $\square$

**Théorème 3.3.1.** Les assertions suivantes sont équivalentes.

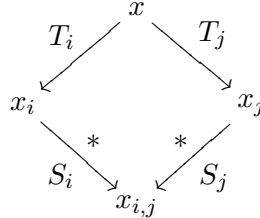
1. La relation de réduction  $\xRightarrow{P}$  est confluente.
2. Toutes les  $P$ -compositions complètes coïncident.
3. Pour tous entiers distincts  $i$  et  $j$  tels que  $1 \leq i, j \leq n$ , il existe une  $P$ -composition contenant  $T_i$  et  $T_j$ .
4. Pour tous entiers distincts  $i$  et  $j$  tels que  $1 \leq i, j \leq n$ , il existe une  $P$ -composition complète contenant  $T_i$  et  $T_j$ .
5. L'opérateur  $T_1 \wedge \dots \wedge T_n$  est une  $P$ -composition complète.
6.  $Obs_{Red}^P = 0$ .

*Démonstration.* On commence par montrer que  $1 \Leftrightarrow 2$ . La relation de réduction  $\xRightarrow{P}$  est confluente si, et seulement si, tout élément a une unique forme normale par le lemme de Newman. Or on a vu qu'un élément  $b$  est la forme normale d'un élément  $a$  si, et seulement si, il existe une  $P$ -composition  $S$  telle que  $S(a) = b$  et  $b$  était  $P$ -réduit. Ce qui donne à : il existe une  $P$ -composition complète  $S'$  telle que  $S'(a) = b$ .

Montrons maintenant l'implication  $2 \Rightarrow 4$ . Soit  $S$  l'unique  $P$ -composition complète. Pour tout  $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$ ,  $ST_j = S$ . En effet,  $ST_j$  est également une  $P$ -composition complète. Donc l'unique  $P$ -composition complète contient bien  $T_i$  et  $T_j$  pour tous  $i \neq j$ .

L'implication  $4 \Rightarrow 3$  est immédiate.

Montrons l'implication  $3 \Rightarrow 1$ . Soient  $i$  et  $j$  deux indices dans  $\llbracket 1, n \rrbracket$ . Par hypothèse, il existe une  $P$ -composition  $S$  telle que  $S = S_i T_i = S_j T_j$  où  $S_i$  et  $S_j$  sont deux  $P$ -compositions. Ceci correspond à la confluence locale de la règle de réécriture  $\xRightarrow{P}$  et donc à la confluence par le lemme de Newmann. En effet, prenons également un élément  $x$  qui ne soit réduit ni par  $T_i$ , ni par  $T_j$ , on a :



Nous allons maintenant montrer l'implication  $2 \Rightarrow 5$ . On note l'unique  $P$ -composition complète  $S$ . Par hypothèse,  $S$  contient tous les opérateurs de  $X$ -réduction  $T_i$ . Donc, pour tout  $1 \leq i \leq n$ , on sait que  $\ker(T_i) \subset \ker(T)$ , et donc :

$$\ker(T_1 \wedge \dots \wedge T_n) = \ker(T_1) + \dots + \ker(T_n) \subset \ker(S)$$

Or, on a également l'inclusion inverse car la  $P$ -composition  $S$  est complète, donc  $S = T_1 \wedge \dots \wedge T_n$ , d'où le résultat.

On montre ensuite l'équivalence  $5 \Leftrightarrow 6$ . On rappelle que

$$\text{Red}(P) = \bigcap_{i=1}^n \text{Red}(T_i) = \text{Red}(T_1 \wedge \dots \wedge T_n) \oplus \text{Obs}_{Red}^P$$

L'opérateur de  $X$ -réduction  $T_1 \wedge \dots \wedge T_n$  est une  $P$ -composition complète si, et seulement si,  $\text{Red}(P) = \text{Red}(T_1 \wedge \dots \wedge T_n)$ , ce qui est équivalent à  $\text{Obs}_{Red}^P = 0$  par le rappel fait avant.



On montre enfin l'implication  $5 \Rightarrow 2$ . Prenons une  $P$ -composition complète  $S$ . On sait alors que

$$\text{Red}(S) = \text{Red}(P) = \text{Red}(T_1 \wedge \dots \wedge T_n),$$

de plus on sait par la proposition 3.3.6 que  $\ker(S) \subset \ker(T_1 \wedge \dots \wedge T_n)$  et comme pour tout opérateur de  $X$ -réduction  $T$ ,  $V = \ker(T) \oplus \text{Red}(T)$ , on a

$$\ker(S) = \ker(T_1 \wedge \dots \wedge T_n).$$

Donc toute  $P$ -composition complète est égale à la  $P$ -composition complète  $T_1 \wedge \dots \wedge T_n$ .  $\square$

**Théorème 3.3.2.** Un couple d'opérateurs de réduction  $(T, U)$  est confluent si, et seulement si,  $(TU)^r = (UT)^r$ , et dans ce cas

$$T \wedge U = (TU)^r = (UT)^r.$$

*Démonstration.* La paire  $(T, U)$  est confliente si, et seulement si, il existe une unique  $\{T, U\}$ -composition complète  $S$ . Cette  $P$ -composition doit contenir  $T$  et  $U$ , elle est donc nécessairement de la forme  $S = (TU)^p = (UT)^q$  où  $p$  et  $q$  sont deux entiers.

Réciproquement, si  $(TU)^r = (UT)^r$ , alors il existe une  $P$ -composition complète contenant  $T$  et  $U$ , ce qui permet d'affirmer la confluence de  $(T, U)$ .

Pour tout élément  $v$  dans l'espace  $V$ ,  $S(v)$  est  $\{T, U\}$ -réduit. Par conséquent,  $p = q = r = \dim(V)$  convient. Par le théorème précédent, on sait également que

$$T \wedge U = (TU)^r = (UT)^r.$$

$\square$

### 3.4 Application aux algèbres quadratiques

**Définition 3.4.1.** Une algèbre  $\mathbf{A}(V, E)$  est *quadratique* si l'espace des relations  $E$  est un sous-espace de  $V \otimes V$ .

Prenons  $\mathbf{A}(V, E)$  une algèbre quadratique, i.e,  $\mathbf{A} = T(V)/I(E)$ .

L'espace tensoriel  $T(V)$  a une graduation naturelle :

$$T(V) = \mathbb{K} \oplus V \oplus V^{\otimes 2} \oplus V^{\otimes 3} \oplus \dots \oplus V^{\otimes n} \oplus \dots$$

En particulier,

$$\begin{aligned} T(V)_0 &= \mathbb{K}, \\ T(V)_n &= V^{\otimes n}. \end{aligned}$$

L'idéal bilatère  $I(E)$  engendré par  $E$  hérite également d'une graduation :

$$\begin{aligned} I(E)_0 &= I(E)_1 = 0, \\ I(E)_n &= \sum_{i+j+2=n} V^{\otimes i} \otimes E \otimes V^{\otimes j}. \end{aligned}$$

Cette graduation induit une graduation sur  $\mathbf{A}$  :

$$\mathbf{A} = \bigoplus \mathbf{A}_n \text{ où } \mathbf{A}_n = V^{\otimes n}/I(E)_n.$$



Soit une base de  $V$  totalement ordonnée  $(X, <)$ . On appelle  $X$ -monôme tout monôme non commutatif en les éléments de la base  $X$ . On note  $X^{(n)}$  la base de  $V^{\otimes n}$

$$X^{(n)} = \{x_{i_1}x_{i_2}\dots x_{i_n} \mid x_{i_j} \in X \text{ pour } 1 \leq j \leq n\}$$

Notons que tous les  $X$ -monômes dans la base  $X^{(n)}$  sont de degré  $n$ .

Soit  $S$  un opérateur de  $X^{(2)}$ -réduction  $S : V \otimes V \rightarrow V \otimes V$  tel que  $\ker S = E$ . Un tel opérateur est bien défini grâce au théorème 3.1.1. On pose alors, pour  $1 \leq n$  et  $1 \leq i \leq n-1$ ,

$$S^{(i)} = id_{V^{\otimes(i-1)}} \otimes S \otimes id_{V^{\otimes(n-i-1)}}.$$

L'application  $S^{(i)}$  est donc un opérateur de réduction sur  $V^{\otimes n}$ . Comme

$$\ker S^{(i)} = V^{\otimes(i-1)} \otimes E \otimes V^{\otimes(n-i-1)}$$

et comme

$$\ker(S^{(1)} \wedge \dots \wedge S^{(n-1)}) = \sum_{i=1}^{n-1} \ker S^{(i)},$$

on a

$$I(E)_n = \ker(S^{(1)} \wedge \dots \wedge S^{(n-1)})$$

On a donc le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccc} V^{\otimes n} & \xrightarrow{S^{(1)} \wedge \dots \wedge S^{(n-1)}} & V^{\otimes n} \\ \downarrow & & \uparrow \\ V^{\otimes n}/I(E)_n & \xrightarrow{\sim} & \text{Im}(S^{(1)} \wedge \dots \wedge S^{(n-1)}) \end{array}$$

Et donc  $S^{(1)} \wedge \dots \wedge S^{(n-1)} : V^{\otimes n} \rightarrow V^{\otimes n}$  induit un isomorphisme d'espaces vectoriels

$$\mathbf{A}_n \simeq \text{Red}(S^{(1)} \wedge \dots \wedge S^{(n-1)})$$

L'ensemble des classes de  $X$ -monômes de degré  $n$  qui sont  $S^{(1)} \wedge \dots \wedge S^{(n-1)}$ -réduits forme une base du  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel  $\mathbf{A}_n$ .

**Définition 3.4.2.** La base de  $\mathbf{A} = \bigoplus \mathbf{A}_n$  obtenue comme réunion de toutes ces bases est appelée *base  $X$ -canonique* de l'algèbre  $\mathbf{A}$ .

On rappelle qu'on s'est donné un opérateur de  $X^{(2)}$ -réduction  $S : V \otimes V \rightarrow V \otimes V$  tel que  $\ker S = E$ . On définit deux opérateurs de  $X^{(3)}$ -réduction :

$$S_1 = S \otimes id_V, \quad S_2 = id_V \otimes S.$$

**Définition 3.4.3.** L'algèbre  $\mathbf{A}$  est  $X$ -confluente si  $(S_1, S_2)$  est confluent.

**Proposition 3.4.1.** Si l'algèbre  $\mathbf{A}$  est  $X$ -confluente, alors  $S^{(1)}, \dots, S^{(n-1)}$  sont deux-à-deux confluents.



*Démonstration.* Soient  $i$  et  $j$  deux entiers tels que  $1 \leq i \leq j \leq n$ .

Si  $j - i \geq 2$ , on a alors :

$$S^{(i)}S^{(j)} = id_{V^{\otimes i-1}} \otimes S \otimes id_{V^{\otimes j-i-2}} \otimes S \otimes id_{V^{\otimes n-j-1}} = S^{(j)}S^{(i)}.$$

Si  $j = i$ , le résultat est immédiat.

Si  $j = i + 1$ , on a alors

$$S^{(i)} = id_{V^{\otimes i-1}} \otimes S_1 \otimes id_{V^{\otimes n-i-2}}$$

et

$$S^{(j)} = id_{V^{\otimes i-1}} \otimes S_2 \otimes id_{V^{\otimes n-i-2}}.$$

Par conséquent, on obtient :

$$\begin{aligned} (S^{(i)}S^{(j)})^r &= id_{V^{\otimes i-1}} \otimes (S_1S_2)^r \otimes id_{V^{\otimes n-i-2}}, \\ &= id_{V^{\otimes i-1}} \otimes (S_2S_1)^r \otimes id_{V^{\otimes n-i-2}} \\ &= (S^{(j)}S^{(i)})^r. \end{aligned}$$

□

Par définition, un élément de degré  $n$  de la base  $X$ -canonique est un monôme  $(S^{(1)} \wedge \dots \wedge S^{(n-1)})$ -réduit. Or, par la propriété précédente :

$$\text{Red}(S^{(1)} \wedge \dots \wedge S^{(n-1)}) = \text{Red}(S^{(1)}) \cap \dots \cap \text{Red}(S^{(n-1)}).$$

Par conséquent, un élément de la base  $X$ -canonique est un monôme  $x_{i_1} \dots x_{i_n}$  où les lettres  $x_{i_j}$  sont des éléments de la base  $X$  tel que pour tout  $1 \leq j \leq n - 1$ , le sous-terme  $x_{i_j}x_{i_{j+1}}$  est  $S$ -réduit.

**Définition 3.4.4.** L'algèbre  $\mathbf{A}(V, E)$  est dite *faiblement confluente* s'il existe une base  $X$  de  $V$  telle que  $\mathbf{A}$  est  $X$ -confluent.



## Chapitre 4

# Résolutions linéaires libres, koszulité

### 4.1 Graduation

On renvoie vers [15] pour les définitions suivantes.

**Définition 4.1.1.** Étant donné un anneau gradué  $R$ , un  $R$ -module gradué  $M$  est un  $R$ -module  $M$  tel qu'il existe une famille de  $R$ -modules  $\{M_n | n \in \mathbb{N}\}$  qui vérifie

$$M = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} M_n$$

et pour tous entiers  $n$  et  $m$

$$R_n M_m \subset M_{n+m}$$

**Définition 4.1.2.** Le produit tensoriel de deux modules gradués  $L$  et  $M$  est le module gradué donné par :

$$(L \otimes M)_n = \sum_{p+q=n} L_p \otimes M_q.$$

**Définition 4.1.3.** Étant donnés  $L$  et  $M$  deux modules gradués, un morphisme  $f : L \rightarrow M$  de degré  $d$  est un morphisme de modules tel que pour tous entiers  $n$

$$f(L_n) \subset M_{n+d}.$$

**Remarque 4.1.1.** Si l'entier  $d$  est négatif, cela signifie que pour tout entier  $n < |d|$ ,

$$f(L_n) = 0.$$

**Définition 4.1.4.** Une algèbre graduée  $\mathbf{A}$  est un  $\mathbb{K}$ -module gradué  $\mathbf{A}$  muni de deux morphismes de  $\mathbb{K}$ -modules

$$m : \mathbf{A} \otimes \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{A} \quad \text{et} \quad e : \mathbb{K} \rightarrow \mathbf{A}$$

chacun de degré nul, tel que les deux diagrammes suivants soient commutatifs :

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{A} \otimes \mathbf{A} \otimes \mathbf{A} & \xrightarrow{1 \otimes m} & \mathbf{A} \otimes \mathbf{A} \\ m \otimes 1 \downarrow & & \downarrow m \\ \mathbf{A} \otimes \mathbf{A} & \xrightarrow{m} & \mathbf{A} \end{array}$$

et :

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{K} \otimes \mathbf{A} & \xrightarrow{\sim} & \mathbf{A} & \xrightarrow{\sim} & \mathbf{A} \otimes \mathbb{K} \\ e \otimes 1 \downarrow & & \parallel & & \downarrow 1 \otimes e \\ \mathbf{A} \otimes \mathbf{A} & \xrightarrow{m} & \mathbf{A} & \xleftarrow{m} & \mathbf{A} \otimes \mathbf{A} \end{array}$$



**Remarque 4.1.2.** On trouve également la définition équivalente suivante. Une algèbre graduée  $\mathbf{A}$  est une algèbre  $\mathbf{A}$  telle qu'il existe une famille d'espaces vectoriels  $\{\mathbf{A}_n | n \in \mathbb{N}\}$  qui vérifie

$$\mathbf{A} = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} \mathbf{A}_n$$

et pour tous entiers  $n$  et  $m$

$$\mathbf{A}_n \mathbf{A}_m \subset \mathbf{A}_{n+m}$$

**Définition 4.1.5.** Une *algèbre graduée augmentée*  $(\mathbf{A}, \epsilon)$  est une algèbre graduée  $\mathbf{A}$  munie d'un morphisme  $\epsilon : \mathbf{A} \rightarrow \mathbb{K}$  d'algèbres graduées.

**Définition 4.1.6.** Un *complexe gradué*  $(X_\bullet, \partial_\bullet)$  de modules est une suite de modules gradués  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  munie de morphismes de degré nul

$$\partial_n : X_n \rightarrow X_{n-1}$$

tels que pour tout entier  $n$ ,  $\text{Im}(\partial_{n+1}) \subset \ker(\partial_n)$ . Si de plus cette inclusion est une égalité, on parle de *résolution graduée*.

**Définition 4.1.7.** Un *module bigradué*  $B$  est une famille de modules  $B_{p,q}$  :

$$B = \{B_{p,q} | p \in \mathbb{N}, q \in \mathbb{N}\}$$

## 4.2 Tor gradué

**Définition 4.2.1.** On se donne une algèbre graduée  $\mathbf{A}$ . Un complexe de  $\mathbf{A}$ -modules à droite

$$\dots \rightarrow P_n \rightarrow P_{n-1} \rightarrow \dots \rightarrow P_2 \rightarrow P_1 \rightarrow P_0 \rightarrow 0$$

est dit *minimal* si les applications

$$P_n \otimes_{\mathbf{A}} \mathbb{K} \xrightarrow{d_n \otimes 1_{\mathbb{K}}} P_{n-1} \otimes_{\mathbf{A}} \mathbb{K}$$

sont nulles. Si le complexe est exact, on parle de *résolution minimale*.

**Définition 4.2.2.** On se donne une algèbre graduée  $\mathbf{A}$  et un  $\mathbf{A}$ -module  $M$ . Le module  $M$  est dit *concentré en degré  $n$* , si chacun de ses éléments est de degré  $n$ . Cela signifie

$$M = M_n$$

**Définition 4.2.3.** On se donne une algèbre graduée  $\mathbf{A}$  et un  $\mathbf{A}$ -module  $M$ . Le module  $M$  est dit *pur en degré  $n$* , s'il existe un module  $N_n$  concentré en degré  $n$  tel que

$$M = N_n \otimes_{\mathbb{K}} \mathbf{A}$$

**Définition 4.2.4.** On se donne une algèbre graduée  $\mathbf{A}$  et un  $\mathbf{A}$ -module gradué  $M$ . Une résolution

$$\dots \rightarrow P_n \rightarrow P_{n-1} \rightarrow \dots \rightarrow P_2 \rightarrow P_1 \rightarrow M \rightarrow 0$$

de modules gradués libres est dite *résolution linéaire libre* si chaque  $P_n$  est pur en degré  $n$ .

**Lemme 4.2.1.** Les résolutions linéaires libres sont minimales.



*Démonstration.* Donnons-nous une résolution linéaire libre :

$$\cdots \longrightarrow P_n \xrightarrow{\partial_n} P_{n-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow P_2 \xrightarrow{\partial_2} P_1 \xrightarrow{\partial_1} M \longrightarrow 0$$

Les modules  $P_n$  sont purs en degré  $n$ , c'est à dire que chaque module  $P_n$  s'écrit

$$P_n = N_n \otimes_{\mathbb{K}} \mathbf{A}$$

où  $N_n$  est un module concentré en degré  $n$ .

Pour tout entier  $n$  et pour tout élément  $x$  du module  $N_n$ , on peut décomposer  $\partial_n(x \otimes 1)$  en :

$$\partial_n(x \otimes 1) = \sum_{y \otimes z \in N_{n-1} \otimes_{\mathbb{K}} \mathbf{A}} y \otimes z$$

Le morphisme  $\partial_n$  est de degré nul, le terme  $x \otimes 1$  est de degré  $n$ , par conséquent chacun des termes  $y \otimes z$  apparaissant dans cette décomposition est de degré  $n$ . Or par définition, dans un tenseur pur  $y \otimes z$  du module  $N_{n-1} \otimes_{\mathbb{K}} \mathbf{A}$ , le terme  $y$  est de degré  $n-1$  et donc le terme  $z$  est de degré 1, il n'est donc pas dans le corps  $\mathbb{K}$ , ce qui donne que pour tout entier  $n$  et pour tout élément  $x$  du module  $N_n$  :

$$(\partial_n \otimes 1_{\mathbb{K}})(x) = 0$$

Par conséquent la résolution est minimale.  $\square$

**Définition 4.2.5.** Soit  $\mathbf{A}$  une algèbre. On se donne un  $\mathbf{A}$ -module à droite  $M$  et une résolution projective  $P_{\bullet}$  de  $M$ . On se donne également  $N$  un  $\mathbf{A}$ -module à gauche, on a alors un complexe  $P_{\bullet} \otimes_{\mathbf{A}} N$ , qui a priori n'est pas exact. On définit alors :

$$Tor_n^{\mathbf{A}}(M, N) = H_n(P_{\bullet} \otimes_{\mathbf{A}} N)$$

**Remarque 4.2.1.** La définition de  $Tor_n^{\mathbf{A}}(M, N)$  ne dépend pas de la résolution projective choisie.

**Remarque 4.2.2.** Si de plus l'algèbre  $\mathbf{A}$  et les modules  $M$  et  $N$  sont gradués, alors pour tout  $n \geq 0$ ,  $Tor_{i,j}^{\mathbf{A}}(M, N)$  est un module bigradué. En effet, si le module  $M$  est gradué, alors il est possible de considérer une résolution projective graduée, c'est-à-dire que chaque module  $P_n$  de la résolution est également gradué. Par conséquent, pour tout  $n$ , le module  $P_n \otimes_{\mathbf{A}} N$  est gradué :

$$(P_n \otimes_{\mathbf{A}} N)_j = \bigoplus_{i=0}^j P_{n,i} \otimes_{\mathbf{A}} N_{j-i}$$

où  $P_{n,i} = (P_n)_i$ . On peut considérer le module  $Tor_{\bullet}^{\mathbf{A}}(M, N)$  également comme un module gradué

$$Tor_i^{\mathbf{A}}(M, N) = \bigoplus_{j \in \mathbb{N}} Tor_{i,j}^{\mathbf{A}}(M, N).$$

**Proposition 4.2.1.** Soient une algèbre graduée  $\mathbf{A}$  et un  $\mathbf{A}$ -module  $M$ . Le module  $M$  possède une résolution linéaire libre si, et seulement si,  $Tor_{i,j}^{\mathbf{A}}(M, \mathbb{K}) = 0$  pour  $i \neq j$ .

*Démonstration.* Supposons que le module  $M$  possède une résolution linéaire libre :

$$\cdots \rightarrow P_n \xrightarrow{d_n} P_{n-1} \rightarrow \cdots \rightarrow P_1 \xrightarrow{d_1} M \rightarrow 0$$



telle que les modules gradués libres  $P_n$  sont purs en degré  $n$ . Alors, comme le corps  $\mathbb{K}$  est de degré nul dans l'algèbre  $\mathbf{A}$  :

$$\begin{aligned} (P_n \otimes_{\mathbf{A}} \mathbb{K})_j &= P_{n,j} \otimes_{\mathbf{A}} \mathbb{K} \\ &= \begin{cases} P_{n,n} \otimes_{\mathbf{A}} \mathbb{K} & \text{si } n = j \\ 0 & \text{si } n \neq j \end{cases} \end{aligned}$$

On rappelle que

$$(H_i(P_{\bullet} \otimes_{\mathbf{A}} \mathbb{K}))_j = (\ker(\delta_i))_j / (\text{Im}(\delta_{i+1}))_j$$

Or  $\ker(\delta_i)$  est un sous-espace de  $P_i \otimes_{\mathbf{A}} \mathbb{K}$ , donc on obtient  $\text{Tor}_{i,j}^{\mathbf{A}}(M, \mathbb{K}) = 0$  si  $i \neq j$

Réciproquement, supposons que  $\text{Tor}_{i,j}^{\mathbf{A}}(M, \mathbb{K}) = 0$  pour  $i \neq j$ . Par définition, on a la suite exacte :

$$\cdots \longrightarrow \text{Tor}_n^{\mathbf{A}}(M, \mathbb{K}) \longrightarrow \text{Tor}_{n-1}^{\mathbf{A}}(M, \mathbb{K}) \longrightarrow \cdots \longrightarrow \text{Tor}_1^{\mathbf{A}}(M, \mathbb{K}) \longrightarrow \text{Tor}_0^{\mathbf{A}}(M, \mathbb{K}) \longrightarrow 0$$

On définit le module

$$X_i = \text{Tor}_i^{\mathbf{A}}(M, \mathbb{K}) \otimes_{\mathbb{K}} \mathbf{A}$$

On rappelle que le tenseur  $\cdot \otimes_{\mathbb{K}} \mathbf{A}$  est exact à droite. Par conséquent, on a la suite exacte :

$$\cdots \longrightarrow X_n \longrightarrow X_{n-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow X_1 \longrightarrow X_0 \longrightarrow 0$$

De plus, comme  $\text{Tor}_0^{\mathbf{A}}(M, \mathbb{K}) = M \otimes_{\mathbf{A}} \mathbb{K}$ , le module  $X_0$  est le module

$$X_0 = M \otimes_{\mathbf{A}} \mathbb{K} \otimes_{\mathbb{K}} \mathbf{A} = M$$

Par conséquent, on obtient résolution du module  $M$  par les modules  $X_n$  qui sont de plus purs en degré  $n$  par définition, ce qui donne la réciproque.  $\square$

### 4.3 Définition de la koszulité

**Définition 4.3.1.** L'algèbre  $\mathbf{A}$  est de type *koszul* si le corps  $\mathbb{K}$  admet une résolution linéaire libre (en tant que  $\mathbf{A}$ -module)

**Remarque 4.3.1.** Par la propriété 4.2.1, L'algèbre  $\mathbf{A}$  est de type *koszul* si, et seulement si, pour tout  $i \neq j$ ,

$$\text{Tor}_{i,j}^{\mathbf{A}}(\mathbb{K}, \mathbb{K}) = 0$$

Berger généralise la définition de la koszulité dans [6].

**Définition 4.3.2.** L'algèbre  $\mathbf{A}$  est *s-koszul* (pour  $s \geq 2$ ) si pour tout  $n \geq 1$ , le groupe  $\text{Tor}_n^{\mathbf{A}}(\mathbb{K}, \mathbb{K})$  est concentré en degré  $J(n)$  où  $J : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  est la fonction définie par :

$$\begin{cases} J(2m) = ms \\ J(2m+1) = ms + 1 \end{cases}$$

Autrement dit, l'algèbre  $A$  est *s-koszul* si pour tout  $n \geq 1$  et pour tout  $j \neq J(n)$

$$\text{Tor}_{n,j}^{\mathbf{A}}(\mathbb{K}, \mathbb{K}) = 0$$



**Exemple 4.3.1.** Reprenons l'exemple 1.4.2 dont nous avons calculé la résolution d'Anick dans l'exemple 2.3.1. Rappelons la résolution d'Anick que nous avons calculée :

$$\begin{aligned}
\delta_0(x \otimes 1) &= 1 \otimes x \\
\delta_0(y \otimes 1) &= 1 \otimes y \\
\delta_0(z \otimes 1) &= 1 \otimes z \\
\delta_1(z|z^2 \otimes 1) &= z \otimes z^2 - x \otimes yz + x \otimes x^2 + y \otimes y^2 \\
\delta_1(z|y^3 \otimes 1) &= z \otimes y^3 - z \otimes xyz + z \otimes x^3 + x \otimes yz^2 - x \otimes x^2z - y \otimes y^2z \\
\delta_{2n}(w_{2n+1}(z, z^2) \otimes 1) &= w_{2n}(z, z^2) \otimes z + w_{2n-1}(z, z^2)|y^3 \otimes 1 \\
\delta_{2n}(w_{2n}(z, z^2)|y^3 \otimes 1) &= w_{2n}(z, z^2) \otimes (x^3 + y^3 - xyz) - w_{2n-1}(z, z^2)|y^3 \otimes z^2 \\
\delta_{2n+1}(w_{2n+2}(z, z^2) \otimes 1) &= w_{2n+1}(z, z^2) \otimes z^2 + w_{2n}(z, z^2)|y^3 \otimes 1 \\
\delta_{2n+1}(w_{2n}(z, z^2)|y^3 \otimes 1) &= w_{2n+1}(z, z^2) \otimes (x^3 + y^3 - xyz) - w_{2n}(z, z^2)|y^3 \otimes z
\end{aligned}$$

pour  $n \geq 1$ .

On peut maintenant calculer l'homologie associée. Pour cela, on tensorise par  $\mathbb{K}$  au dessus de  $\mathbf{A}$  :

$$\begin{aligned}
(\delta_0 \otimes_{\mathbf{A}} 1_{\mathbb{K}})(x) &= \overline{\delta_0}(y) = \overline{\delta_0}(z) = 0 \\
(\delta_1 \otimes_{\mathbf{A}} 1_{\mathbb{K}})(z|z^2) &= \overline{\delta_1}(z|y^3) = 0 \\
(\delta_n \otimes_{\mathbf{A}} 1_{\mathbb{K}})(w_{n+1}(z, z^2)) &= w_{n-1}(z, z^2)|y^3 \\
(\delta_n \otimes_{\mathbf{A}} 1_{\mathbb{K}})(w_n(z, z^2)|y^3) &= 0
\end{aligned}$$

On peut donc calculer l'homologie associée :

$$Tor_n^{\mathbf{A}}(\mathbb{K}, \mathbb{K}) = \ker \overline{\delta_{n-1}} / \operatorname{im} \overline{\delta_n}$$

$$\begin{aligned}
Tor_0^{\mathbf{A}}(\mathbb{K}, \mathbb{K}) &= \mathbb{K} \\
Tor_1^{\mathbf{A}}(\mathbb{K}, \mathbb{K}) &= \mathbb{K}\langle x, y, z \rangle \\
Tor_2^{\mathbf{A}}(\mathbb{K}, \mathbb{K}) &= \mathbb{K}\langle z|z^2, z|y^3 \rangle / \mathbb{K}\langle z|y^3 \rangle = \mathbb{K}\langle z|z^2 \rangle \\
Tor_n^{\mathbf{A}}(\mathbb{K}, \mathbb{K}) &= \mathbb{K}\langle w_{n-1}(z, z^2)|y^3 \rangle / \mathbb{K}\langle w_{n-1}(z, z^2)|y^3 \rangle = 0
\end{aligned}$$

où  $n \geq 1$ .

Par conséquent, cette algèbre est 3-kozul.



## Chapitre 5

# Koszulité des algèbres quadratiques

Dans toute cette partie, nous ne considérerons que des algèbres  $\mathbf{A}$  quadratiques. Une algèbre  $\mathbf{A}(V, E)$  est quadratique, si  $E \subset V^{\otimes 2}$ . Une algèbre  $\mathbf{A}(X, R)$  est quadratique, si les relations dans l'ensemble  $R$  sont quadratiques :  $R \subset X^{\otimes 2}$ . Nous appliquerons les approches d'Anick et de Berger au cas des algèbres quadratiques. Nous introduirons également la notion de bases de Poincaré-Birkhoff-Witt. Nous montrerons que ces trois approches sont équivalentes dans le cas des algèbres quadratiques pour montrer la koszulité d'une algèbre.

### 5.1 Base de Gröbner quadratique

**Théorème 5.1.1.** Une algèbre monomiale quadratique est de type koszul.

*Démonstration.* Il s'agit d'une conséquence directe de la proposition 2.3.1.  $\square$

**Théorème 5.1.2.** Soit  $\mathbf{A}(X, R)$  une algèbre telle que le système de réécriture  $(X, R)$  soit convergent et tel que les relations dans l'ensemble  $R$  soient quadratiques. L'algèbre  $\mathbf{A}$  est de type koszul.

*Démonstration.* Si toutes les relations de  $R$  sont quadratiques, alors toutes les  $n$ -chaînes sont de longueur  $n + 1$  pour  $n \geq 0$ . Dans la résolution obtenue en tensorisant la résolution d'Anick

$$\cdots \longrightarrow \mathcal{A}_n \longrightarrow \mathcal{A}_{n-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow \mathcal{A}_1 \longrightarrow \mathcal{A}_0 \longrightarrow 0$$

chaque module  $\mathcal{A}_i = \mathbb{K}\langle \mathcal{C}_{i-1} \rangle \otimes_{\mathbb{K}} A$  est pur en degré  $i$ . On rappelle que

$$\mathrm{Tor}_{i,j}(\mathbb{K}, \mathbb{K}) \subset \mathcal{A}_i \otimes_{\mathbf{A}} \mathbb{K} = \mathbb{K}\langle \mathcal{C}_{i-1} \rangle$$

et par conséquent, tous les espaces  $\mathrm{Tor}_{i,j}(\mathbb{K}, \mathbb{K})$  sont concentrés en degré  $i$ . Donc l'algèbre  $\mathbf{A}$  est de type koszul.  $\square$

**Remarque 5.1.1.** Il existe des algèbres  $\mathbf{A}(X, R)$  de type koszul, telles que les relations dans l'ensemble  $R$  soient quadratiques, mais telles que le système de réécriture  $(X, R)$  ne soit pas convergent. Donnons en un exemple :

**Exemple 5.1.1.** Dans l'exemple 2.3.4, nous avons calculé la résolution d'Anick associée à l'algèbre

$$\mathbf{A} = \langle x, y, z | x^2 + yz = 0, x^2 + azy = 0 \rangle$$

où  $a$  est un élément du corps  $\mathbb{K}$  différent de 0. Nous avons obtenu pour l'augmentation

$$\begin{cases} \epsilon(1) = 1 \\ \epsilon(x) = \epsilon(y) = \epsilon(z) = 0 \end{cases}$$



$$\begin{aligned}
\delta_0(x \otimes 1) &= 1 \otimes x \\
\delta_0(y \otimes 1) &= 1 \otimes y \\
\delta_1(y|z \otimes 1) &= y \otimes z + x \otimes x \\
\delta_1(z|y \otimes 1) &= z \otimes y + \frac{1}{a}x \otimes x \\
\delta_1(y|x^2 \otimes 1) &= y \otimes x^2 - ax \otimes xy \\
\delta_1(z|x^2 \otimes 1) &= z \otimes x^2 - \frac{1}{a}x \otimes xz \\
\delta_{n+1}(\dots|z|y \otimes 1) &= \Lambda|z \otimes y + \frac{1}{a}\Lambda|x^2 \otimes 1 \\
\delta_{n+1}(\dots|y|z \otimes 1) &= \Lambda'|y \otimes z + \Lambda'|x^2 \otimes 1 \\
\delta_{n+1}(\dots|z|x^2 \otimes 1) &= \Lambda|z \otimes x^2 - \frac{1}{a}\Lambda|x^2 \otimes z \\
\delta_{n+1}(\dots|y|x^2 \otimes 1) &= \Lambda'|y \otimes x^2 - a\Lambda'|x^2 \otimes y
\end{aligned}$$

pour  $n \geq 1$ . On obtient alors l'homologie suivante pour  $n \geq 3$  :

$$\begin{aligned}
Tor_0^{\mathbf{A}}(\mathbb{K}, \mathbb{K}) &= \mathbb{K} \\
Tor_1^{\mathbf{A}}(\mathbb{K}, \mathbb{K}) &= \mathbb{K}\langle x, y, z \rangle \\
Tor_2^{\mathbf{A}}(\mathbb{K}, \mathbb{K}) &= \mathbb{K}\langle y|z, z|y, y|x^2, z|x^2 \rangle / \mathbb{K}\langle y|x^2, z|x^2 \rangle = \mathbb{K}\langle y|z, z|y \rangle \\
Tor_n^{\mathbf{A}}(\mathbb{K}, \mathbb{K}) &= \mathbb{K}\langle \Lambda|z|x^2, \Lambda'|y|x^2 \rangle / \mathbb{K}\langle \Lambda|z|x^2, \Lambda'|y|x^2 \rangle = 0
\end{aligned}$$

Cette algèbre est donc de type koszul, quelle que soit la valeur de  $a \neq 0$ .

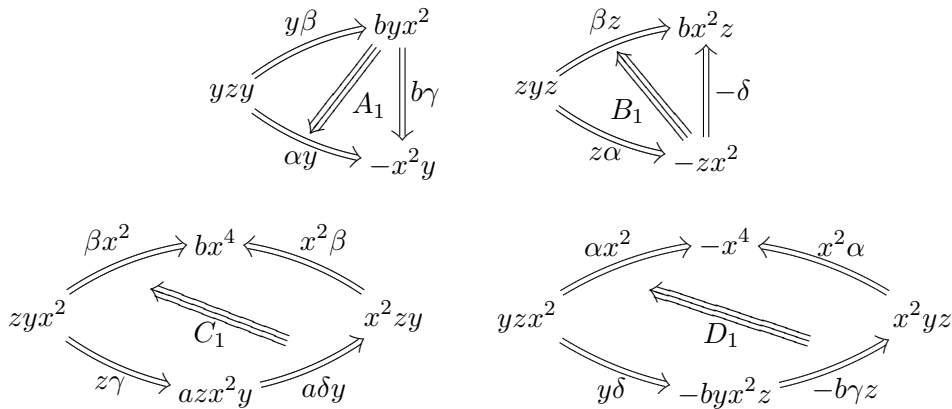
**Exemple 5.1.2.** Interprétons l'homologie  $Tor_n^{\mathbf{A}}(\mathbb{K}, \mathbb{K})$  que nous avons calculée dans l'exemple précédent à ce qu'il se passe au niveau des  $n$ -uplets critiques. Nous noterons  $b = -1/a$ . Tout d'abord, les relations que nous avions étaient :

$$yz \xrightarrow{\alpha} -x^2 \quad zy \xrightarrow{\beta} bx^2$$

En complétant le système pour obtenir la base de Gröbner, on a rajouté les deux règles :

$$yx^2 \xrightarrow{\gamma} ax^2y \quad zx^2 \xrightarrow{\delta} -bx^2z$$

Toutes les paires critiques sont confluentes, ce qui nous permet d'introduire les 3-cellules qui correspondent aux paires critiques :





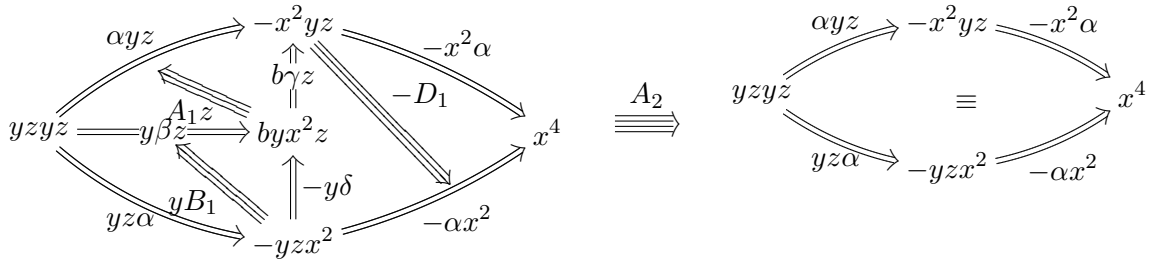
On constate que la relation  $\gamma$  est un bord de la 3-cellule  $A_1$ , par réduction homotopique, on peut supprimer simultanément  $A_1$  et  $\gamma$ . De façon similaire, on peut supprimer simultanément la relation  $\delta$  et la 3-cellule  $B_1$ . Par contre, on ne peut pas supprimer les 3-cellules  $C_1$  et  $D_1$  car les réductions  $\alpha$  et  $\beta$  n'apparaissent pas comme bord de ces 3-cellules. Rappelons que nous avons calculé que le groupe d'homologie  $H_2(\mathbf{A}, \mathbb{K})$  était  $\mathbb{K}\langle y|z, z|y \rangle$ , ce qui correspond aux paires critiques qu'on n'a pas pu supprimer en même temps qu'une 3-cellule par réduction homotopique.

Considérons maintenant ce qu'il se passe au niveau des triplets critiques :

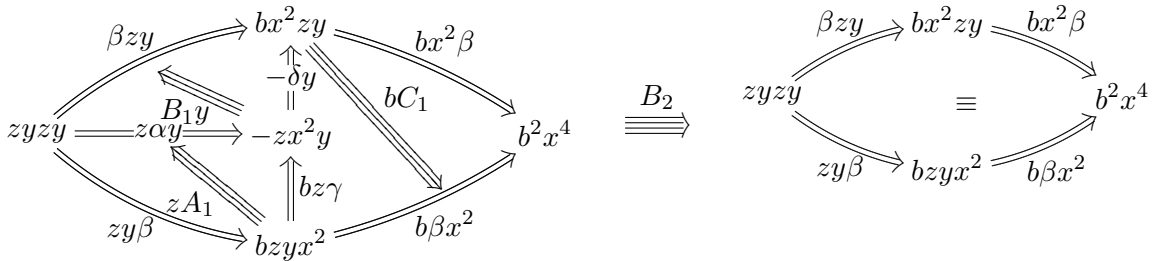
$$yzyz, yzyx^2, zyzy, zyzx^2.$$

Nous allons étudier les 4-cellules associées à ces triplets critiques. Comme toutefois il est impossible de les représenter en 3 dimensions et de façon lisible, nous avons choisi de les ouvrir en représentant d'abord une face puis une autre.

Tout d'abord, pour le premier triplet critique  $yzyz$ , on obtient la 4-cellule :



Considérons maintenant le triplet critique  $zyzy$ , on obtient la 4-cellule :



Dans le bord de la 4-cellule  $A_2$  apparaît une seule fois la 3-cellule  $D_1$ , de plus, la cellule  $D_1$  y apparaît sans contexte. Cela signifie que la 4-cellule  $A_2$  permet d'exprimer  $D_1$  en fonction de  $A_1$  et  $B_1$ . De façon similaire, la 4-cellule  $B_2$  permet d'exprimer  $C_1$  en fonction de  $A_1$  et  $B_1$ . On avait trouvé l'expression suivante :

$$H_3(\mathbf{A}, \mathbb{K}) = \mathbb{K}\langle y|z|x^2, z|y|x^2 \rangle / \mathbb{K}\langle y|z|x^2, z|y|x^2 \rangle = 0$$

avec l'image de  $\overline{\delta_2} = \delta_2 \otimes 1_{\mathbb{K}}$  donnée par :

$$\begin{aligned} \overline{\delta_2}(z|y|z|y) &= -bz|y|x^2 \\ \overline{\delta_2}(y|z|y|z) &= y|z|x^2 \end{aligned}$$

Si on considère maintenant le triplet critique  $yzyx^2$ , on obtient la 4-cellule :







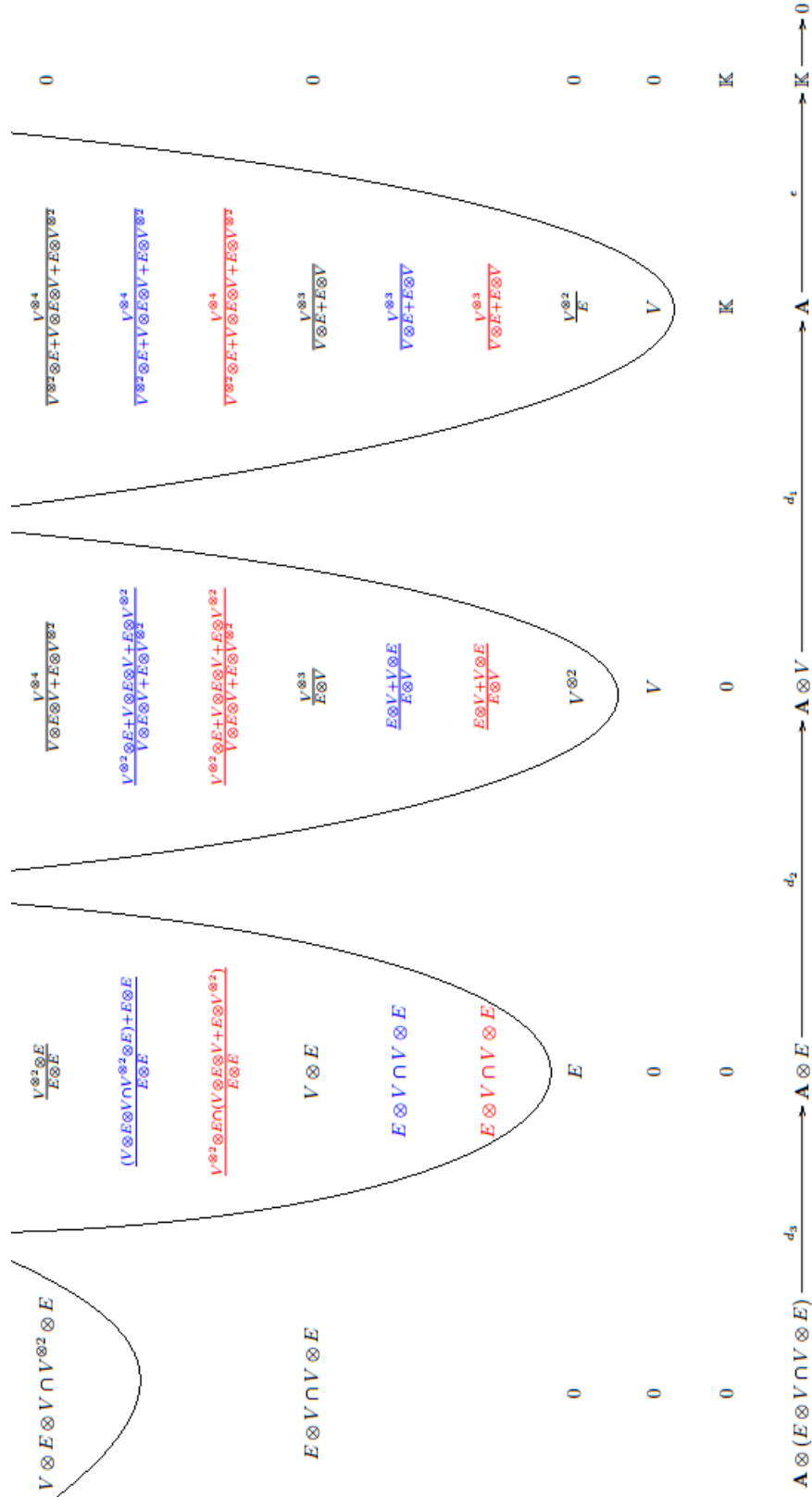


FIGURE 5.1 – Complexe de Koszul : le complexe est représenté en bas en noir. Les graduations de 0 à 4 sont représentées au dessus. En bleu (au dessus), on a représenté les images graduées des applications et en rouge (en dessous) les noyaux pour les graduations 3 et 4. Les noyaux des applications sont représentés par la parabole



On donne également les morphismes  $d_n : K_n \rightarrow K_{n-1}$ . L'application  $d_0$  correspond à l'augmentation  $\epsilon$ . L'application  $d_1$  correspond au morphisme de  $\mathbf{A}$ -modules à gauche induit par l'inclusion de  $V$  dans  $\ker \epsilon$ . Pour  $n \geq 2$ , l'application  $d_n$  est le morphisme de  $\mathbf{A}$ -modules à gauche induit par l'inclusion de  $\bigcap_{i+j+2=n-1} V^{\otimes i} \otimes E \otimes V^{\otimes j}$  dans  $\ker(d_{n-1})$ .

**Définition 5.2.2.** L'algèbre  $\mathbf{A}$  est *de type koszul* si le complexe de koszul est exact.

On définit de même que Backelin dans [8] la notion d'algèbre distributive.

**Définition 5.2.3.** Soit  $\mathbf{A}(V, E)$  une algèbre quadratique. L'algèbre  $\mathbf{A}$  est dite *distributive* si pour  $n \geq 3$ , le sous-treillis de  $\mathcal{L}(V^{\otimes n})$  engendré par les sous-espaces  $E^{(i)} = V^{\otimes(i-1)} \otimes E \otimes V^{\otimes(n-i-1)}$ , où  $1 \leq i \leq n-1$ , est distributif. C'est-à-dire, pour  $1 \leq i, j, k \leq n-1$ ,

$$E^{(i)} + (E^{(j)} \cap E^{(k)}) = (E^{(i)} + E^{(j)}) \cap (E^{(i)} + E^{(k)})$$

Cette dernière condition est équivalente à :

$$E^{(i)} \cap (E^{(j)} + E^{(k)}) = (E^{(i)} \cap E^{(j)}) + (E^{(i)} \cap E^{(k)})$$

Un résultat important démontré par Backelin dans [8] établit une équivalence entre distributivité et koszulité.

**Théorème 5.2.1.** Soit  $\mathbf{A}$  une algèbre quadratique.

L'algèbre  $\mathbf{A}$  est distributive si, et seulement si, l'algèbre  $\mathbf{A}$  est koszul.

Nous donnons une idée de la preuve, pour la preuve détailler on pourra se référer à [8]. Considérons la figure 5.1. On constate que les lignes des degrés 0, 1 et 2 sont exactes.

Considérons maintenant le degré 3. L'application  $d_1$  correspond à la projection

$$\frac{V^{\otimes 3}}{E \otimes V} \twoheadrightarrow \frac{V^{\otimes 3}}{V \otimes E + E \otimes V},$$

ce qui justifie que  $(\text{Im}(d_1))_3 = (\ker \epsilon)_3$ . Calculons maintenant le noyau de l'application  $d_1$  en degré 3 :

$$(\ker(d_1))_3 = \frac{E \otimes V + V \otimes E}{E \otimes V}.$$

L'image de l'application  $d_2$  est induite par le plongement de  $V \otimes E$  dans  $V^{\otimes 3}$  :

$$(\text{Im}(d_2))_3 = \frac{V \otimes E}{E \otimes V} = \frac{E \otimes V + V \otimes E}{E \otimes V}.$$

On en conclut donc que  $(\ker(d_1))_3 = (\text{Im}(d_2))_3$ . On obtient de même le noyau de  $d_2$  :

$$(\ker(d_2))_3 = \{x \in V \otimes E \mid x \in E \otimes V\} = E \otimes V \cap V \otimes E.$$

L'application  $d_3$  correspond au plongement de  $E \otimes V \cap V \otimes E$  dans  $V \otimes E$ , ce qui donne également  $(\ker(d_2))_3 = (\text{Im}(d_3))_3$ . La ligne en degré 3 est donc également exacte.

Considérons le degré 4. De façon similaire, on obtient que

$$(\ker \epsilon)_4 = (\text{Im}(d_1))_4 \quad \text{et} \quad (\ker(d_1))_4 = (\text{Im}(d_2))_4$$

Calculons maintenant le noyau de l'application  $d_2$ , on a :

$$\begin{aligned} (\ker(d_2))_4 &= \frac{\{x \in V^{\otimes 2} \otimes E \mid x \in V \otimes E \otimes V + E \otimes V^{\otimes 2}\}}{E \otimes E}, \\ &= \frac{V^{\otimes 2} \otimes E \cap (V \otimes E \otimes V + E \otimes V^{\otimes 2})}{E \otimes E}. \end{aligned}$$



On calcule maintenant l'image de l'application  $d_3$ . L'application  $d_3$  se factorise en :

$$\begin{array}{ccc} V \otimes E \otimes V \cap V^{\otimes 2} \otimes E & \xrightarrow{\quad} & \frac{V^{\otimes 2} \otimes E}{E \otimes E} \\ & \searrow \quad \nearrow & \\ & V^{\otimes 2} \otimes E & \end{array}$$

Ce qui donne

$$(\text{Im}(d_3))_4 = \frac{(V \otimes E \otimes V \cap V^{\otimes 2} \otimes E)}{E \otimes E} = \frac{(V \otimes E \otimes V \cap V^{\otimes 2} \otimes E) + E \otimes E}{E \otimes E}$$

Pour que le complexe de koszul soit exact en degré 4, il faut et il suffit donc que

$$V^{\otimes 2} \otimes E \cap (V \otimes E \otimes V + E \otimes V^{\otimes 2}) = (V \otimes E \otimes V \cap V^{\otimes 2} \otimes E) + (E \otimes V^{\otimes 2} \cap V^{\otimes 2} \otimes E)$$

Reprenons les notations données dans la définition 5.2.3 :

$$\begin{cases} E^{(1)} = E \otimes V^{\otimes 2} \\ E^{(2)} = V \otimes E \otimes V \\ E^{(3)} = V^{\otimes 2} \otimes E \end{cases}$$

La condition se réécrit alors :

$$E^{(3)} \cap (E^{(2)} + E^{(1)}) = (E^{(2)} \cap E^{(3)}) + (E^{(1)} \cap E^{(3)})$$

Elle correspond à la distributivité de  $\mathcal{L}(V^{\otimes 4})$ .

En poursuivant ainsi en tous les degrés, on obtient la distributivité pour tous les espaces  $\mathcal{L}(V^{\otimes n})$ .

### 5.3 Distributivité et $X$ -confluence

Donnons-nous une algèbre quadratique  $\mathbf{A}(V, E)$ .

**Définition 5.3.1.** Soit  $P$  un ensemble d'opérateurs de  $X$ -réduction. L'ensemble  $P$  est *confluent* si les opérateurs de  $X$ -réduction dans  $P$  sont confluents deux-à-deux.

**Proposition 5.3.1.** Soit  $P$  un ensemble confluent d'opérateurs de  $X$ -réduction. Le sous-treillis de  $\mathcal{L}_X(V)$  engendré par l'ensemble  $P$  est confluent.

*Démonstration.* Il suffit de montrer qu'étant donnés trois opérateurs de  $X$ -réduction  $S, T$  et  $U$  deux-à-deux confluents, les couples  $(S, T \wedge U)$  et  $(S, T \vee U)$  sont confluents. Par dualité, il suffit de montrer que le couple  $(S, T \wedge U)$  est confluent.

Dans un treillis, on sait que :

$$S \vee (T \wedge U) \leq (S \vee T) \wedge (S \vee U)$$

Nous allons en déduire une inégalité sur les défauts de confluence. L'expression précédente donne

$$\text{Red}(S \vee (T \wedge U)) \subset \text{Red}((S \vee T) \wedge (S \vee U))$$



En remplaçant  $\text{Red}((S \vee T) \wedge (S \vee U))$  par l'expression donnée par la définition de l'espace d'obstruction  $\text{Obs}_{\text{Red}}^{(S \vee T), (S \vee U)}$ , on obtient

$$\text{Red}(S \vee (T \wedge U)) \oplus \text{Obs}_{\text{Red}}^{(S \vee T), (S \vee U)} \subset \text{Red}((S \vee T)) \cap \text{Red}((S \vee U)).$$

On note  $L$  la partie gauche de cette inégalité et  $R$  la partie droite. On obtient :

$$\begin{aligned} L &= (\text{Red}(S) + \text{Red}(T \wedge U)) \oplus \text{Obs}_{\text{Amb}}^{S, (T \wedge U)} \oplus \text{Obs}_{\text{Red}}^{(S \vee T), (S \vee U)}, \\ &= \text{Red}(S) \oplus (\text{NRed}(S) \cap \text{Red}(T \wedge U)) \oplus \text{Obs}_{\text{Amb}}^{S, (T \wedge U)} \oplus \text{Obs}_{\text{Red}}^{(S \vee T), (S \vee U)}. \end{aligned}$$

Si on considère maintenant la partie droite  $R$ , on obtient :

$$\begin{aligned} R &= ((\text{Red}(S) + \text{Red}(T)) \oplus \text{Obs}_{\text{Amb}}^{S, T}) \cap ((\text{Red}(S) + \text{Red}(U)) \oplus \text{Obs}_{\text{Amb}}^{S, U}), \\ &\subset [(\text{Red}(S) + \text{Red}(T)) \cap (\text{Red}(S) + \text{Red}(U))] \oplus (\text{Obs}_{\text{Amb}}^{S, U} + \text{Obs}_{\text{Amb}}^{S, T}), \\ &\subset [(\text{Red}(S) \oplus (\text{NRed}(S) \cap \text{Red}(T))) \cap (\text{Red}(S) \oplus (\text{NRed}(S) \cap \text{Red}(U)))] \\ &\quad \oplus (\text{Obs}_{\text{Amb}}^{S, U} + \text{Obs}_{\text{Amb}}^{S, T}), \\ &\subset \text{Red}(S) \oplus (\text{NRed}(S) \cap \text{Red}(T) \cap \text{Red}(U)) \oplus (\text{Obs}_{\text{Amb}}^{S, U} + \text{Obs}_{\text{Amb}}^{S, T}), \\ &\subset \text{Red}(S) \oplus (\text{NRed}(S) \cap (\text{Red}(T \wedge U) \oplus \text{Obs}_{\text{Red}}^{T, U})) \oplus (\text{Obs}_{\text{Amb}}^{S, U} + \text{Obs}_{\text{Amb}}^{S, T}), \\ &\subset \text{Red}(S) \oplus (\text{NRed}(S) \cap \text{Red}(T \wedge U)) \oplus (\text{NRed}(S) \cap \text{Obs}_{\text{Red}}^{T, U}) \oplus (\text{Obs}_{\text{Amb}}^{S, U} + \text{Obs}_{\text{Amb}}^{S, T}). \end{aligned}$$

Ce qui donne en réunissant les expressions obtenues pour  $L$  et  $R$  :

$$\text{Obs}_{\text{Amb}}^{S, (T \wedge U)} \oplus \text{Obs}_{\text{Red}}^{(S \vee T), (S \vee U)} \subset (\text{NRed}(S) \cap \text{Obs}_{\text{Red}}^{T, U}) \oplus (\text{Obs}_{\text{Amb}}^{S, U} + \text{Obs}_{\text{Amb}}^{S, T})$$

D'où l'expression sur les défauts de confluence :

$$\text{def}_C(S, T \wedge U) + \text{def}_C(S \vee T, S \vee U) \leq \text{def}_C(T, U) + \text{def}_C(S, U) + \text{def}_C(S, T)$$

Comme les opérateurs  $S, T$  et  $U$  sont deux-à-deux confluents, on en déduit bien que le couple  $(S, T \wedge U)$  est confluent.  $\square$

**Proposition 5.3.2.** Soit  $P$  un sous-treillis confluent de  $\mathcal{L}_X(V)$ . La restriction de l'application  $\pi_X : \mathcal{L}_X(V) \rightarrow \mathcal{P}(X)$  au sous-treillis  $P$  est un isomorphisme de treillis de  $P$  sur son image. En particulier,  $P$  est alors distributif.

*Démonstration.* Notons  $\pi'_X : P \rightarrow \pi_X(P)$  la restriction de l'application  $\pi_X$  au treillis  $P$ . Comme le treillis  $P$  est confluent, il s'agit bien d'un morphisme de treillis. Étant donnés deux éléments  $T$  et  $U$  de  $P$ , on a bien

$$\pi'_X(T \wedge U) = \pi'_X(T) \cap \pi'_X(U) \quad \text{et} \quad \pi'_X(T \vee U) = \pi'_X(T) + \pi'_X(U).$$

L'application  $\pi'_X$  est surjective. Il reste à montrer qu'elle est également injective. Prenons deux éléments  $T$  et  $U$  de  $P$  tels que  $\pi'_X(T) = \pi'_X(U)$ . On a donc  $\text{Red}(T) = \text{Red}(U)$  et de plus le couple  $(T, U)$  est confluent. Par la propriété 3.2.1, on obtient  $T = U$ . Par conséquent l'application  $\pi'_X$  est bien un isomorphisme de treillis.  $\square$

**Corollaire 5.3.1.** Soit  $P$  un ensemble confluent d'opérateurs de  $X$ -réduction. Le sous-treillis de  $\mathcal{L}_X(V)$  engendré par l'ensemble  $P$  est distributif.

**Théorème 5.3.1.** Toute algèbre quadratique faiblement confluyente est de type koszul.



*Démonstration.* Soit  $\mathbf{A}(V, E)$  une algèbre faiblement confluente. Par définition, il existe une base  $X$  de l'espace  $V$  tel que l'algèbre  $\mathbf{A}$  soit  $X$ -confluente. Soit  $n$  un entier fixé. Soit l'ensemble d'opérateurs de  $X$ -réductions  $P = \{S^{(1)}, \dots, S^{(n)}\}$ . Comme l'algèbre est  $X$ -confluente, les éléments de  $P$  sont deux à deux confluents, donc le treillis engendré par l'ensemble  $P$  est distributif. Comme l'application  $\theta_X$  est un isomorphisme de treillis, le sous-treillis de  $\mathcal{L}(V^{\otimes n})$  engendré par les noyaux des opérateurs  $S^{(j)}$  où  $1 \leq j \leq n$  est distributif. Or  $\ker(S^{(j)}) = E^{(j)}$ . Donc l'algèbre est distributive et par conséquent koszul.  $\square$

**Corollaire 5.3.2.** Toute algèbre quadratique monomiale est de type koszul.

**Remarque 5.3.1.** Ce corollaire correspond au théorème 5.1.1

**Exemple 5.3.1.** La réciproque du théorème est fausse, en particulier R.Berger a montré dans [5] que les algèbres de Sklyanin ne sont pas faiblement confluentes, alors que Van den Bergh a montré par une méthode homologique dans [20] que les algèbres de Sklyanin sont de type koszul. Nous allons tâcher de donner une intuition du raisonnement de Berger, on pourra se référer à [5] pour les détails.

Une algèbre de Sklyanin est une algèbre à trois générateurs  $x, y$  et  $z$  et trois relations :

$$\begin{aligned}\alpha yz + \beta zy + \gamma x^2 &= 0, \\ \alpha xy + \beta yx + \gamma z^2 &= 0, \\ \alpha zx + \beta xz + \gamma y^2 &= 0,\end{aligned}$$

où  $\alpha, \beta$  et  $\gamma$  sont des scalaires. On considère une algèbre de Sklyanin  $\mathbf{A}$ , cela revient à fixer les trois scalaires  $\alpha, \beta$  et  $\gamma$ . On note  $V$  l'espace vectoriel engendré par les  $X$ -générateurs  $x, y, z$  et  $E$  celui engendré par les relations. Pour montrer que l'algèbre  $\mathbf{A}$  n'est pas faiblement confluente, Berger procède en trois étapes.

Tout d'abord, il s'intéresse à une base ordonnée  $X$  de l'espace  $V$  :

$$X = \{x < y < z\}$$

Il définit également l'opérateur de  $X^{(2)}$ -réduction  $S$  tel que  $\ker(S) = E$ . Ceci nous permet de calculer les dimensions de  $A_2$  et de  $A_3$ .

Ensuite, on constate que se donner une base ordonnée  $Y$  de  $V$  revient à se donner un automorphisme  $\phi$  de  $V$ . Cette approche se justifie par le fait que l'algèbre  $\mathbf{A}$  est de type koszul si, et seulement si, l'algèbre  $\phi(\mathbf{A})$  est de type koszul. L'opérateur de  $Y^{(2)}$ -réduction qui est alors à considérer est  $T = \phi S$ . On peut montrer que le monôme  $zz$  est  $T$ -non-réduit.

Enfin, on peut alors utiliser les dimensions calculées précédemment :

$$\dim(\phi(A_2)) = \dim(A_2) = 6 \quad \text{et} \quad \dim(\phi(A_3)) = \dim(A_3) = 10.$$

Pour montrer que l'algèbre n'est pas  $Y$ -confluente, il suffit donc de montrer qu'il existe plus de dix monômes de la forme  $abc$  où  $a, b$  et  $c$  sont dans la base  $Y$  et tels que  $ab$  et  $bc$  sont  $T$ -réduits. Berger montre expérimentalement le résultat suivant qui correspond au lemme 5.2 de [5] :

**Lemme 5.3.1.** Soit  $M$  l'ensemble des monômes non commutatifs de longueur 2 en  $x, y$  et  $z$ . Pour tout sous-ensemble  $N$  de l'ensemble  $M$  tel que  $N$  contienne six éléments, on note  $d(N)$  le nombre de monômes de longueur trois tel que chacun de leurs sous-monômes de longueur 2 soit dans  $N$ .

Si le monôme  $zz$  n'est pas dans l'ensemble  $N$  alors  $d(N) > 10$ .

Ce lemme fait également l'objet d'une généralisation qui correspond au théorème 6.1 de [5].



## 5.4 Bases de Poincaré-Birkhoff-Witt

On se donne une algèbre quadratique  $\mathbf{A}(V, E)$  et un alphabet totalement ordonné

$$X = \{x_1 < \dots < x_m\}.$$

On étend cet ordre en l'ordre deglex sur tout  $\mathbb{K}\langle X \rangle = V$ . Une base de  $V^{\otimes 2}$  est

$$X^{(2)} = \{x_i \otimes x_j \mid i, j \in \llbracket 1, m \rrbracket\}$$

ordonnée via l'ordre deglex. On considère l'ensemble

$$S = \{(i_1, i_2) \mid \overline{x_{i_1} x_{i_2}} \notin Vect(\overline{x_{j_1} x_{j_2}} \mid (j_1, j_2) < (i_1, i_2))\}.$$

**Remarque 5.4.1.** Si le couple  $(i_1, i_2)$  est dans l'ensemble  $S$ , alors  $\overline{x_{i_1} x_{i_2}}$  ne s'écrit pas comme combinaison linéaire d'éléments  $\overline{x_{j_1} x_{j_2}}$  pour  $(j_1, j_2) \in S$ .

**Lemme 5.4.1.** La famille  $(\overline{x_{i_1} x_{i_2}})_{(i_1, i_2) \in S}$  forme une base de  $V^{\otimes 2}/E$ .

*Démonstration.* Commençons par montrer que la famille  $(\overline{x_{i_1} x_{i_2}})_{(i_1, i_2) \in S}$  est une famille libre de  $V^{\otimes 2}/E$ . On se donne une combinaison linéaire nulle de ses éléments :

$$\sum_{(i_1, i_2) \in S} \mu_{(i_1, i_2)} \overline{x_{i_1} x_{i_2}} = 0.$$

Soit  $(j_1, j_2) = \max\{(i_1, i_2) \in S \mid \mu_{(i_1, i_2)} \neq 0\}$ . Comme par définition de l'ensemble  $S$ ,  $\overline{x_{j_1} x_{j_2}}$  n'est pas dans l'espace  $Vect(\overline{x_{i_1} x_{i_2}} \mid (i_1, i_2) < (j_1, j_2))$ , on a nécessairement pour  $(i_1, i_2) < (j_1, j_2)$  :  $\mu_{(i_1, i_2)} = 0$  et  $\mu_{(j_1, j_2)} = 0$ .

On montre ensuite que la famille  $(\overline{x_{i_1} x_{i_2}})_{(i_1, i_2) \in S}$  est une famille génératrice de  $V^{\otimes 2}/E$ . Soit  $v$  dans l'espace  $V \otimes V$  :

$$v = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m v_{(i,j)} x_i x_j.$$

Par conséquent, dans l'algèbre  $\mathbf{A}$  :

$$\bar{v} = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m v_{(i,j)} \overline{x_i x_j}.$$

Soit  $(k, l) = \max\{(i, j) \mid v_{(i,j)} \neq 0\}$ . Il y a deux cas à distinguer. Si  $(k, l)$  est dans l'ensemble  $S$ , alors on garde  $\overline{x_k x_l}$  dans la décomposition de  $\bar{v}$ . Sinon,  $\overline{x_k x_l}$  se réécrit en  $\sum_{(a,b) < (k,l)} \xi_{(a,b)} \overline{x_a x_b}$ . On réitère ce processus. Ce processus s'arrête bien et on obtient une décomposition de  $\bar{v}$  de la forme :

$$\bar{v} = \sum_{(i,j) \in S} v'_{(i,j)} \overline{x_i x_j}.$$

□

**Lemme 5.4.2. (Caractérisation de l'ensemble  $S$ )** Une base de l'espace des relations  $E$  est formée par les vecteurs

$$x_{i_1} x_{i_2} - \sum_{\substack{(j_1, j_2) < (i_1, i_2) \\ (j_1, j_2) \in S}} \lambda_{(i_1, i_2)}^{(j_1, j_2)} x_{j_1} x_{j_2}$$

où  $(i_1, i_2) \in \llbracket 1, m \rrbracket^2 \setminus S$



*Démonstration.* Pour  $(i_1, i_2) \in \llbracket 1, m \rrbracket^2 \setminus S$ , on prend des scalaires  $\lambda_{(i_1, i_2)}^{(j_1, j_2)}$  tel que dans l'algèbre  $\mathbf{A}$  :

$$\overline{x_{i_1} x_{i_2}} = \sum_{\substack{(j_1, j_2) < (i_1, i_2) \\ (j_1, j_2) \in S}} \lambda_{(i_1, i_2)}^{(j_1, j_2)} \overline{x_{j_1} x_{j_2}}.$$

Ceci est bien possible car par définition, si le couple  $(i_1, i_2)$  n'est pas dans l'ensemble  $S$ , alors  $\overline{x_{i_1} x_{i_2}}$  est dans l'espace  $Vect(\overline{x_{j_1} x_{j_2}} | (j_1, j_2) < (i_1, i_2))$ .

Cette famille est bien libre. On considère une combinaison linéaire nulle dans  $V \otimes V$  de ses éléments :

$$\sum_{(i_1, i_2) \notin S} \mu_{(i_1, i_2)} \left( x_{i_1} x_{i_2} - \sum_{\substack{(j_1, j_2) < (i_1, i_2) \\ (j_1, j_2) \in S}} \lambda_{(i_1, i_2)}^{(j_1, j_2)} x_{j_1} x_{j_2} \right) = 0.$$

Cette combinaison linéaire s'écrit également :

$$\sum_{(i_1, i_2) \notin S} \mu_{(i_1, i_2)} x_{i_1} x_{i_2} - \sum_{(j_1, j_2) \in S} \left( \sum_{\substack{(i_1, i_2) < (j_1, j_2) \\ (i_1, i_2) \notin S}} \mu_{(i_1, i_2)} \lambda_{(j_1, j_2)}^{(i_1, i_2)} \right) x_{j_1} x_{j_2} = 0.$$

Comme la famille  $(x_{i_1} x_{i_2})_{(i_1, i_2) \in \llbracket 1, m \rrbracket^2}$  forme une base de  $V \otimes V$ , on sait que chacun des coefficients de cette somme est nul.

Par le lemme 5.4.1, on sait que  $\dim(V/E) = \text{card}(S)$ , et on sait également que  $\dim(V) = m^2$ . Par conséquent  $\dim(E) = m^2 - \text{card}(S)$ . On avait montré que la famille considérée était libre et on vient de montrer que son cardinal était  $\dim(E)$ . Donc cette famille est une base de  $E$ .

Il reste à montrer que cette propriété caractérise bien l'ensemble  $S$ . Soit une base  $\mathcal{B}$  de l'espace  $E$  dont les vecteurs sont de la forme

$$x_{i_1} x_{i_2} - \sum_{(j_1, j_2) < (i_1, i_2)} \lambda_{(i_1, i_2)}^{(j_1, j_2)} x_{j_1} x_{j_2}$$

où  $(i_1, i_2) \in \overline{S}$ . L'ensemble  $\overline{S}$  est un sous-ensemble de  $\llbracket 1, m \rrbracket$ . On pose  $S = \llbracket 1, m \rrbracket \setminus \overline{S}$ . Par définition, l'ensemble  $S$  est bien :

$$S = \{(i_1, i_2) | \overline{x_{i_1} x_{i_2}} \notin Vect(\overline{x_{j_1} x_{j_2}} | (j_1, j_2) < (i_1, i_2))\}$$

Par conséquent, à partir d'une telle base de l'espace  $E$ , on est capable de définir un ensemble  $S$ .

De plus, si on considère deux ensembles  $S_1$  et  $S_2$  tels qu'ils définissent la même base de l'espace  $E$ , on a nécessairement  $S_1 = S_2$ .  $\square$

On pose ensuite pour  $n \geq 3$

$$\begin{aligned} S^{(0)} &= \emptyset \\ S^{(1)} &= \llbracket 1, m \rrbracket \\ S^{(2)} &= S \\ S^{(n)} &= \{(i_1, i_2, \dots, i_n) | (i_1, i_2), (i_2, i_3), \dots, (i_{n-1}, i_n) \in S\} \end{aligned}$$

**Exemple 5.4.1.** On étudie l'algèbre

$$\mathbf{A} = \langle x, y | xy - x^2 \rangle.$$



On se donne l'ordre sur les lettres  $x < y$ , qu'on étend en l'ordre deglex  $<$  sur les mots.

En reprenant les notations précédentes, on a  $x = x_1 < x_2 = y$ . On commence par déterminer les ensembles  $S$  et  $S^{(n)}$  pour  $n \geq 3$  :

$$\begin{aligned} S &= \{(1, 1), (2, 1), (2, 2)\}, \\ S^{(n)} &= \{(\underbrace{2, \dots, 2}_k, \underbrace{1, \dots, 1}_l) \mid k + l = n \text{ et } 0 \leq k \leq n\}. \end{aligned}$$

Pour un  $n$ -uplet  $\alpha = (i_1, i_2, \dots, i_n)$ , on note  $x_\alpha = x_{i_1} \dots x_{i_n}$ .

**Définition 5.4.1.** Si la famille  $\mathcal{B} = (\overline{x_\alpha})_{\alpha \in \cup_{n \geq 0} S^{(n)}}$  forme une base de  $\mathbf{A}$ , les vecteurs  $x_1, \dots, x_m$  sont appelés *générateurs de Poincaré-Birkhoff-Witt* (PBW) et la base  $\mathcal{B}$  est appelée *base de Poincaré-Birkhoff-Witt* (PBW) de  $\mathbf{A}$ .

**Définition 5.4.2.** Une algèbre est dite *de Poincaré-Birkhoff-Witt* (PBW) si elle admet une base de PBW.

**Remarque 5.4.2.** On peut vérifier de même que dans la preuve du lemme 5.4.1 qu'une telle famille est toujours génératrice de  $\mathbf{A}$ . Prenons un élément  $x$  de l'algèbre  $\mathbf{A}$ . On peut lui associer un élément  $v$  de l'espace  $V^{\otimes n}$  tel que  $x = \bar{v}$ , on a alors dans la base  $X^{(n)}$  :

$$v = \sum_{i_1, \dots, i_n=1}^m v_{i_1, \dots, i_n} x_{i_1} \dots x_{i_n}$$

Donc dans l'algèbre  $\mathbf{A}$  :

$$x = \bar{v} = \sum_{i_1, \dots, i_n=1}^m v_{i_1, \dots, i_n} \overline{x_{i_1} \dots x_{i_n}}$$

L'ordre donné sur l'ensemble  $S^{(n)}$  induit un ordre total et monomial sur la base  $X^{(n)}$ , on peut donc considérer l'élément maximal  $x_{i_1} \dots x_{i_n}$  apparaissant avec un coefficient non nul dans la décomposition de  $v$  dans  $V^{\otimes n}$ . Si  $(i_1, \dots, i_n)$  est dans  $S^{(n)}$ , alors, on conserve  $\overline{x_{i_1} \dots x_{i_n}}$  dans la décomposition de  $x$  dans  $\mathbf{A}$ . Si  $(i_1, \dots, i_n)$  n'est pas dans  $S^{(n)}$ , alors, par définition, l'élément  $\overline{x_{i_1} \dots x_{i_n}}$  peut s'écrire comme combinaison linéaire d'éléments strictement inférieurs, car l'ordre sur  $X^{(n)}$  est monomial. On poursuit ensuite cet algorithme sur le reste de la décomposition de  $x$  dans  $\mathbf{A}$ , et on obtient une décomposition de  $x$  ne faisant intervenir que des éléments  $\overline{x_{i_1} \dots x_{i_n}}$  où  $(i_1, \dots, i_n)$  est dans  $S^{(n)}$ .

Il n'y a donc qu'à vérifier qu'une telle famille  $\mathcal{B} = (\overline{x_\alpha})_{\alpha \in \cup_{n \geq 0} S^{(n)}}$  est libre pour montrer qu'il s'agit d'une base de l'algèbre  $\mathbf{A}$ .

**Théorème 5.4.1. (Lemme du Diamant pour les bases PBW)** Si les monômes

$$(x_{i_1} x_{i_2} x_{i_3} \mid (i_1, i_2, i_3) \in S^{(3)})$$

sont linéairement indépendants dans  $\mathbf{A}_3$ , alors les monômes

$$(x_{i_1} x_{i_2} \dots x_{i_n} \mid (i_1, i_2, \dots, i_n) \in S^{(n)})$$

sont linéairement indépendants dans  $\mathbf{A}_n$  et alors  $(x_1, \dots, x_m)$  sont des générateurs PBW de  $\mathbf{A}$ . Donc l'algèbre  $\mathbf{A}$  est PBW.

**Exemple 5.4.2.** Dans l'exemple 5.4.1, l'algèbre  $\mathbf{A}$  est PBW. En effet, on peut expliciter pour  $n = 3$  :  $S^{(3)} = \{(2, 2, 2), (2, 2, 1), (2, 1, 1), (1, 1, 1)\}$ . L'ensemble  $\{\overline{y^3}, \overline{y^2x}, \overline{yx^2}, \overline{x^3}\}$  est bien une base de  $\mathbf{A}_3$ .



*Démonstration.* Rappelons que l'algèbre  $\mathbf{A}$  correspond à l'algèbre  $\mathbf{A}(V, E)$ . On s'était également donné une base  $X$  de  $V$ . On peut donc se donner également une base  $R$  de  $E$  telle que  $R \subset X \otimes X$ .

Si les monômes  $(x_{i_1}x_{i_2}x_{i_3} | (i_1, i_2, i_3) \in S^{(3)})$  sont linéairement indépendants dans  $\mathbf{A}_3$ , alors les paires critiques du système de réécriture  $(X, R)$  sont confluentes. Par le lemme du diamant classique, chaque terme a donc une unique forme normale. Notons

$$M_n = \{x_{i_1}x_{i_2}\dots x_{i_n} | (i_1, i_2, \dots, i_n) \in S^{(n)}\}$$

Considérons une combinaison linéaire  $\Gamma$  dans l'espace  $\mathbf{A}_n$  de monômes dans l'ensemble  $M_n$ . Par définition de  $S^{(n)}$ , chaque monôme de l'ensemble  $M_n$  est en forme normale. Par conséquent, la combinaison linéaire  $\Gamma$  est en forme normale. Si on suppose de plus que la combinaison linéaire  $\Gamma$  est nulle, il existe deux formes normales pour  $\Gamma$ . Ce qui est impossible. Par conséquent, les éléments de  $M_n$  sont linéairement indépendants.

Si les monômes  $(x_{i_1}x_{i_2}\dots x_{i_n} | (i_1, i_2, \dots, i_n) \in S^{(n)})$  sont linéairement indépendants dans  $\mathbf{A}_n$  pour tout  $n \geq 3$ , alors la famille  $\mathcal{B} = (x_\alpha)_{\alpha \in \cup_{n \geq 0} S^{(n)}}$  est libre dans l'algèbre  $\mathbf{A}$  (car les relations sont homogènes), donc  $(x_1, \dots, x_m)$  sont des générateurs PBW de  $\mathbf{A}$  et l'algèbre  $\mathbf{A}$  est PBW.  $\square$

## 5.5 Comparaison entre base PBW et bases de Gröbner

**Théorème 5.5.1.** Posons

$$G = \left\{ x_{i_1}x_{i_2} - \sum_{\substack{(j_1, j_2) < (i_1, i_2) \\ (j_1, j_2) \in S}} \lambda_{(i_1, i_2)}^{(j_1, j_2)} x_{j_1}x_{j_2} \mid (i_1, i_2) \in \llbracket 1, m \rrbracket^2 \setminus S \right\}$$

Les trois propriétés suivantes sont équivalentes :

1. L'algèbre  $\mathbf{A}$  est PBW.
2. L'ensemble  $G$  est une base de Gröbner de  $I(E)$ .
3. La relation de réécriture  $\Rightarrow_G$  est confluyente.

*Démonstration.* Commençons par montrer l'équivalence entre 2 et 3. L'implication directe est donnée par la définition 1.4.3 des base de Gröbner. La réciproque est donnée par le lemme 5.4.2.

On montre ensuite que le point 1 implique le point 3. Pour cela, il suffit de montrer la confluence des paires critiques. Donnons-nous un élément  $x_{i_1}x_{i_2}x_{i_3}$  de  $V^{\otimes 3}$  tel que

$$\overline{x_{i_1}x_{i_2}} = \sum_{\substack{(j_1, j_2) < (i_1, i_2) \\ (j_1, j_2) \in S}} \lambda_{(i_1, i_2)}^{(j_1, j_2)} \overline{x_{j_1}x_{j_2}}$$

et

$$\overline{x_{i_2}x_{i_3}} = \sum_{\substack{(k_2, k_3) < (i_2, i_3) \\ (k_2, k_3) \in S}} \lambda_{(i_2, i_3)}^{(k_2, k_3)} \overline{x_{k_2}x_{k_3}}.$$

Si cette paire critique n'est pas confluyente, alors l'élément  $x_{i_1}x_{i_2}x_{i_3}$  a deux formes normales qu'on note :

$$\begin{aligned} \overline{x_{i_1}x_{i_2}x_{i_3}} &= \sum_{(a_1, a_2, a_3) \in S^{(3)}} \mu_{(a_1, a_2, a_3)} x_{a_1}x_{a_2}x_{a_3}, \\ &= \sum_{(b_1, b_2, b_3) \in S^{(3)}} \xi_{(b_1, b_2, b_3)} x_{b_1}x_{b_2}x_{b_3}. \end{aligned}$$



On a donc dans  $V^{\otimes 3}$

$$\sum_{(a_1, a_2, a_3) \in S^{(3)}} (\mu_{(a_1, a_2, a_3)} - \xi_{(a_1, a_2, a_3)}) x_{a_1} x_{a_2} x_{a_3} = 0.$$

Comme l'algèbre  $\mathbf{A}$  est PBW, la famille  $\mathcal{B} = (x_\alpha)_{\alpha \in \cup_{n \geq 0} S^{(n)}}$  est libre. Donc, pour tout triplet  $(a_1, a_2, a_3) \in S^{(3)}$ , on a :

$$\mu_{(a_1, a_2, a_3)} = \xi_{(a_1, a_2, a_3)}$$

Par conséquent, les deux formes normales sont égales. D'où la confluence de toutes les paires critiques.

Enfin, il reste à montrer que le point 2 implique le point 1. Si l'ensemble  $G$  est une base de Gröbner, alors pour tout entier  $n \geq 2$ , tous les  $n$ -uplets critiques sont convergents. On se donne la combinaison linéaire dans l'algèbre  $\mathbf{A}$

$$\sum_{(i_1, i_2, i_3) \in \mathcal{I}} \mu_{(i_1, i_2, i_3)} x_{i_1} x_{i_2} x_{i_3} = 0,$$

où  $\mathcal{I}$  est un sous-ensemble non vide de  $S^{(3)}$  tel que  $\mu_{(i_1, i_2, i_3)} \neq 0$  pour  $(i_1, i_2, i_3) \in \mathcal{I}$ .

Soit  $(j_1, j_2, j_3)$  élément maximal de  $\mathcal{I}$ , on a alors la règle de réécriture

$$x_{j_1} x_{j_2} x_{j_3} \Rightarrow \sum_{(i_1, i_2, i_3) \in \mathcal{I}} \xi_{(i_1, i_2, i_3)} x_{i_1} x_{i_2} x_{i_3}.$$

On peut de plus supposer qu'il existe  $(i_1, i_2, i_3) \in \mathcal{I}$  tel que  $x_{i_1} \neq x_{j_1}$  et qu'il existe  $(k_1, k_2, k_3) \in \mathcal{I}$  tel que  $x_{k_3} \neq x_{j_3}$

Mais ceci est impossible car l'élément  $x_{j_1} x_{j_2} x_{j_3}$  est en forme normale (de plus, la forme de la base de Gröbner l'interdirait).

Par conséquent les monômes  $(x_{i_1} x_{i_2} x_{i_3} | (i_1, i_2, i_3) \in S^{(3)})$  sont linéairement indépendants dans  $\mathbf{A}_3$ . Donc par le théorème 5.4.1, l'algèbre  $\mathbf{A}$  est PBW.  $\square$

**Remarque 5.5.1.** Étant donnée une base de Gröbner quadratique, le lemme 5.4.2 donne un ensemble  $S$  tel que défini au début de la section, par conséquent, on peut écrire la base  $G$  sous la forme demandée dans le théorème 5.5.1. Par conséquent, à toute base de Gröbner quadratique, on peut associer une base PBW, et réciproquement.

**Théorème 5.5.2.** Si une algèbre est PBW, alors elle est de type koszul.

*Démonstration.* On a montré que si une algèbre est PBW, alors elle admettait une base de Gröbner quadratique (théorème 5.5.1). On sait également que si une algèbre admet une base de Gröbner quadratique, alors elle est koszul (par le théorème 5.1.2). D'où le résultat souhaité.  $\square$

## 5.6 Bases de Poincaré-Birkhoff-Witt et bases X-canonique

On définit l'opérateur de  $X^{(2)}$ -réduction  $U : V \otimes V \rightarrow V \otimes V$  de la façon suivante. Si  $(i_1, i_2)$  est dans  $S$  alors

$$U(x_{i_1} x_{i_2}) = x_{i_1} x_{i_2},$$

sinon,

$$\sum_{\substack{(j_1, j_2) < (i_1, i_2) \\ (j_1, j_2) \in S}} \lambda_{(i_1, i_2)}^{(j_1, j_2)} x_{j_1} x_{j_2}$$

Pour  $n \geq 3$  et  $1 \geq i \geq n-1$ , on définit l'opérateur  $U^{(i)} = id_{V^{\otimes(i-1)}} \otimes U \otimes id_{V^{\otimes(n-i-1)}} : V^{\otimes n} \rightarrow V^{\otimes n}$ .

Le résultat suivant est un théorème de Berger [5].



**Théorème 5.6.1.** Soit  $I$  un sous-ensemble de  $\llbracket 1, m \rrbracket^n$ . Soit  $\mathcal{B} = \{x_\alpha\}_{\alpha \in I}$ .

Alors  $\mathcal{B}$  est une base de PBW si, et seulement si,  $\mathcal{B}$  est une base  $X$ -canonique.

*Démonstration.* Il suffit de montrer que les monômes  $x_{i_1} \dots x_{i_n}$  sont  $U^{(1)} \wedge \dots \wedge U^{(n)}$ -réduits si, et seulement si, le  $n$ -uplet  $(i_1, \dots, i_n)$  est dans  $S^{(n)}$ .

Comme l'algèbre est  $X$ -confluente, on sait que

$$\text{Red}(U^{(1)} \wedge \dots \wedge U^{(n)}) = \bigcap_{j=1}^n \text{Red}(U^{(j)})$$

Considérons un  $n$ -uplet  $\alpha = (i_1, \dots, i_n)$  dans  $S^{(n)}$ . Alors, pour tout  $1 \leq j \leq n$ , on obtient, par définition de l'opérateur  $U$ , que  $U^{(j)}(x_\alpha) = x_\alpha$ , ce qui revient à dire que le monôme  $x_\alpha$  est  $U^{(j)}$ -réduit pour tout  $1 \leq j \leq n$ . Donc le monôme  $x_\alpha$  est  $U^{(1)} \wedge \dots \wedge U^{(n)}$ -réduit.

Réciproquement, on considère un  $n$ -uplet  $\alpha = (i_1, \dots, i_n)$  qui n'est pas dans  $S^{(n)}$ . Alors, il existe  $j \in \llbracket 1, m \rrbracket$  tel que  $(i_j, i_{j+1})$  n'est pas dans l'ensemble  $S$  donc  $U^{(j)}(x_\alpha) < x_\alpha$ . Par conséquent, le monôme  $x_\alpha$  n'est pas  $U^{(1)} \wedge \dots \wedge U^{(n)}$ -réduit.  $\square$

**Exemple 5.6.1.** On étudie l'algèbre

$$\mathbf{A} = \langle x, y | xy - x^2 \rangle$$

Nous allons appliquer les trois méthodes (Anick, Berger et PBW). On se donne l'ordre deglex induit par l'ordre alphabétique  $x < y$ .

**Base de Gröbner** Il y a une unique relation  $xy \implies xx$ . Il n'y a pas de paires critiques et par conséquent, la base de Gröbner est :

$$G = \{xy \implies x^2\}$$

**X-confluence** On définit l'opérateur  $S$  de  $X^{(2)}$ -confluence comme étant l'unique opérateur de noyau  $\ker(S) = \mathbb{K}\langle xy - x^2 \rangle$ . On peut alors définir les opérateurs  $S_1 = S \otimes id_V$  et  $S_2 = id_V \otimes S$ . On va calculer leur défaut d'obstruction. On a donc :

$$\begin{aligned} \ker(S_1) &= \mathbb{K}\langle xyx - x^3, xy^2 - x^2y \rangle \\ \ker(S_2) &= \mathbb{K}\langle x^2y - x^3, yxy - yx^2 \rangle \\ \ker(S_1 \wedge S_2) &= \mathbb{K}\langle x^2y - x^3, yxy - yx^2, xyx - x^3, xy^2 - x^2y \rangle \end{aligned}$$

Les vecteurs dans la décomposition de  $\ker(S_1 \wedge S_2)$  sont indépendants, par conséquent,

$$\dim \text{Red}(S_1 \wedge S_2) = 4$$

On calcule maintenant la dimension de  $\text{Red}(S_1) \cap \text{Red}(S_2)$ .

$$\begin{aligned} \text{Red}(S) &= \mathbb{K}\langle x^2, yx, y^2 \rangle \\ \text{Red}(S_1) &= \mathbb{K}\langle x^3, x^2y, yx^2, yxy, y^2x, y^3 \rangle \\ \text{Red}(S_2) &= \mathbb{K}\langle x^3, xyx, xy^2, yx^2, y^2x, y^3 \rangle \\ \text{Red}(S_1) \cap \text{Red}(S_2) &= \mathbb{K}\langle x^3, yx^2, y^2x, y^3 \rangle \end{aligned}$$

On a donc bien  $\dim \text{Red}(S_1 \wedge S_2) = \dim(\text{Red}(S_1) \cap \text{Red}(S_2))$  et donc

$$\text{Red}(S_1 \wedge S_2) = \text{Red}(S_1) \cap \text{Red}(S_2)$$

L'algèbre  $\mathbf{A}$  est donc bien  $X$ -confluente, et sa base  $X$ -canonique est  $\{x^m y^p | m \geq 0 \text{ et } p \geq 0\}$



**Base PBW** On a montré dans l'exemple 5.4.1 que

$$S^{(3)} = \{(2, 2, 2), (2, 2, 1), (2, 1, 1), (1, 1, 1)\}$$

et que l'ensemble  $\{\overline{y^3}, \overline{y^2x}, \overline{yx^2}, \overline{x^3}\}$  est bien une base de  $\mathbf{A}_3$ . Par conséquent l'algèbre  $\mathbf{A}$  est PBW.

**Exemple 5.6.2.** On reprend l'algèbre  $\mathbf{A}$  considérée dans l'exemple précédent. On se donne cette fois l'ordre deglex induit par l'ordre alphabétique  $y < x$ .

**Base de Gröbner** La relation s'écrit  $xx \xRightarrow{\alpha} xy$ . Il y a une paire critique  $xxx$  :

$$\begin{array}{c} \nearrow x\alpha \\ xxx \\ \searrow \alpha x \\ xyx \end{array} \quad \begin{array}{c} xxy \xRightarrow{\alpha y} xyx \\ \end{array}$$

On rajoute donc la règle  $xyx \xRightarrow{\alpha_3} xy^2$ . Il y a alors deux nouvelles paires critiques :  $xyx$  et  $xyxx$

$$\begin{array}{c} \nearrow x\alpha_3 \\ xyx \\ \searrow \alpha yx \\ xyx \end{array} \quad \begin{array}{c} xxyy \xRightarrow{\alpha yy} xyxy \\ \end{array}$$

On rajoute donc la règle  $xy^2x \xRightarrow{\alpha_4} xy^3$ . L'autre paire critique est confluente grâce à la règle  $\alpha_4$ . Il y a alors de nouvelles paires critiques :  $xyxyx$ ,  $xyyxx$ ,  $xyxyyx$  et  $xyxyxx$ .

$$\begin{array}{c} \nearrow x\alpha_4 \\ xyxyx \\ \searrow \alpha yyx \\ xyxyx \end{array} \quad \begin{array}{c} xyxyy \xRightarrow{\alpha yyy} xyxyyy \\ \end{array}$$

$$\begin{array}{c} \nearrow xy\alpha_4 \\ xyxyyx \\ \searrow \alpha_3 yyx \\ xyxyyx \end{array} \quad \begin{array}{c} xyxyyy \xRightarrow{\alpha_3 yyy} xyxyyyy \\ \end{array}$$

On doit donc rajouter les règles  $xy^3x \xRightarrow{\alpha_5} xy^4$  et  $xy^4x \xRightarrow{\alpha_6} xy^5$ . Les autres paires critiques sont alors confluentes, mais on obtient de nouvelles paires critiques. En fait, on se rend compte que la base de Gröbner est infinie et est :

$$G = \{xy^n x \xRightarrow{\alpha_{n+2}} xy^{n+1} | n \geq 0\}$$

Il apparait immédiatement que la base de Gröbner n'est pas quadratique.



**X-confluence** Le noyau ne change pas par rapport au cas précédent où  $x < y$ , par conséquent, on a toujours  $\dim \text{Red}(S_1 \wedge S_2) = 4$ .

On calcule maintenant la dimension de  $\text{Red}(S_1) \cap \text{Red}(S_2)$ .

$$\begin{aligned}\text{Red}(S) &= \mathbb{K}\langle xy, yx, y^2 \rangle \\ \text{Red}(S_1) &= \mathbb{K}\langle xyx, xy^2, yx^2, yxy, y^2x, y^3 \rangle \\ \text{Red}(S_2) &= \mathbb{K}\langle x^2y, yxy, xyx, y^2x, xy^2, y^3 \rangle \\ \text{Red}(S_1) \cap \text{Red}(S_2) &= \mathbb{K}\langle yxy, xyx, y^2x, xy^2, y^3 \rangle\end{aligned}$$

Le défaut de confluence est donc  $\text{def}_C(S_1, S_2) = 1$ . L'algèbre  $\mathbf{A}$  n'est pas  $X$ -confluente avec cette base ordonnée.

**Base PBW** En reprenant les notations précédentes, on a  $y = x_1 < x_2 = x$ . Comme l'ordre des lettres a changé, on a inversé les indices correspondants. On commence par déterminer les ensembles  $S$  et  $S^{(3)}$  :

$$\begin{aligned}S &= \{(1, 1), (1, 2), (2, 1)\} \\ S^{(3)} &= \{(1, 1, 2), (1, 1, 1), (1, 2, 1), (2, 1, 1), (2, 1, 2)\}\end{aligned}$$

Or l'ensemble  $\{\overline{y^2x}, \overline{y^3}, \overline{yxy}, \overline{xy^2}, \overline{xyx}\}$  n'est pas libre dans  $\mathbf{A}_3$ . En effet, comme on a la paire critique  $xxx$ , on a  $\overline{xyx} = \overline{xy^2}$ .

Par conséquent l'algèbre  $\mathbf{A}$  n'admet pas de base PBW pour cet ordre.

Récapitulons les résultats de ce chapitre :

**Théorème 5.6.2.** Soit  $\mathbf{A}(X, R) = \mathbf{A}(V, E)$  une algèbre. Les quatres propriétés suivantes sont équivalentes :

1. Le système de réécriture  $(X, R)$  admet une base de Gröbner quadratique.
2. Les opérateurs  $S_1 = S \otimes id_V$  et  $S_2 = id_V \otimes S$  où l'opérateur  $S$  est défini par  $\ker(S) = E$  sont  $X$ -confluents.
3. L'algèbre  $\mathbf{A}$  admet une base  $X$ -canonique.
4. L'algèbre  $\mathbf{A}$  admet une base de Poincaré-Birkhoff-Witt.

Si ces propriétés sont vérifiées, alors la base  $X$ -canonique et la base de Poincaré-Birkhoff-Witt sont identiques et de plus l'algèbre  $\mathbf{A}$  est Koszul.



## Chapitre 6

# Koszulité des algèbres homogènes

Dans tout ce chapitre nous allons étudier la  $s$ -koszulité pour un entier  $s \geq 2$ . La 2-koszulité correspond à la koszulité telle qu'étudiée dans le chapitre précédent. Cependant, comme on le verra, les résultats obtenus sur la koszulité dans le cadre des algèbres quadratiques se généralisent assez mal au cas où l'algèbre est  $s$ -homogène pour  $s \geq 3$ .

On pose pour tout ce chapitre la fonction de saut :

$$J : \begin{cases} \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \\ 2n \mapsto sn \\ 2n+1 \mapsto sn+1 \end{cases}$$

### 6.1 Algèbres monomiales

**Théorème 6.1.1.** Soit  $\mathbf{A}(X, R)$  une algèbre  $s$ -homogène monomiale. L'algèbre  $\mathbf{A}$  est  $s$ -koszul si, et seulement si, pour tout entier  $n$ , les  $n$ -chaînes sont de longueur  $J(n+1)$ .

*Démonstration.* On munit l'algèbre  $\mathbf{A}$  de l'augmentation définie par  $\epsilon(x) = 0$  pour  $x \neq 1$  et  $\epsilon(1) = 1$ .

Par la propriété 2.3.1, la résolution d'Anick de l'algèbre augmentée  $(A, \epsilon)$  est

$$\cdots \longrightarrow \mathcal{A}_n \xrightarrow{\delta_n} \mathcal{A}_{n-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow \mathcal{A}_0 \xrightarrow{\delta_0} \mathcal{A}_{-1} \xrightarrow{\epsilon} \mathbb{K} \longrightarrow 0$$

où

$$\mathcal{A}_n = \mathbb{K}\langle \mathcal{C}_n \rangle \otimes \mathbf{A}$$

où les ensembles  $\mathcal{C}_n$  sont les ensembles de  $n$ -chaînes et où les applications  $\delta_n$  pour  $n \geq 0$  vérifient

$$\delta_n(f|t \otimes 1) = f \otimes t$$

On note  $\overline{\delta_n} = \delta_n \otimes 1_{\mathbb{K}}$ . On obtient :

$$\overline{\delta_n}(f|t) = 0$$

On peut donc calculer le groupe d'homologie :

$$H_n(\mathbf{A}, \mathbb{K}) = \mathbb{K}\langle \mathcal{C}_{n-1} \rangle$$

L'équivalence devient désormais immédiate : l'algèbre  $\mathbf{A}$  est  $s$ -koszul si, et seulement si, tous les groupes d'homologie  $H_n(\mathbf{A}, \mathbb{K})$  sont nuls en degré non égal à  $J(n+1)$ , si, et seulement si, pour tout  $n \geq 0$ , toutes les  $n$ -chaînes sont de longueur  $J(n+1)$ .  $\square$



### Remarque 6.1.1. Critères de kszulité

Il est immédiat de constater que ce critère de kszulité est équivalent au suivant : pour tout entier  $n \geq 1$ , pour toute  $n$ -chaîne  $f|t_1|t_2$ , le monôme  $t_1t_2$  est dans l'ensemble  $R$ . Nous appellerons ce critère  $(K_1)$ .

Dans [6], Berger démontre le résultat suivant (proposition 3.8) :

**Proposition 6.1.1.** Soit  $\mathbf{A}(X, R)$  une algèbre monômiale  $s$ -homogène. On pose

$$X = \{x_1, \dots, x_n\}$$

L'algèbre  $\mathbf{A}$  est  $s$ -kszul si, et seulement l'ensemble  $R$  vérifie la propriété suivante :

Si un mot  $x_{i_1} \dots x_{i_n}$  est tel que  $s + 2 \leq n \leq 2s - 1$  et tel que le premier sous-mot de longueur  $s$ ,  $x_{i_1} \dots x_{i_s}$ , et le dernier,  $x_{i_{n-s+1}} \dots x_{i_n}$ , sont dans l'ensemble  $R$ , alors chacun de ses sous-mots de longueur  $s$  est dans l'ensemble  $R$ .

Nous appellerons ce deuxième critère de Kszulité  $(K_2)$ .

Commençons par montrer que  $(K_1)$  implique  $(K_2)$ . On reprend les notations de Berger : on considère un mot  $x_{i_1} \dots x_{i_n}$  où  $s + 2 \leq n \leq 2s - 1$  et tel que le premier sous-mot de longueur  $s$ ,  $x_{i_1} \dots x_{i_s}$ , et le dernier,  $x_{i_{n-s+1}} \dots x_{i_n}$ , sont dans l'ensemble  $R$ . Supposons également qu'aucun autre sous-mot de  $x_{i_1} \dots x_{i_s}$  ne soit dans l'ensemble  $R$ . Alors ce mot est une 2-chaîne  $x_{i_1} | x_{i_2} \dots x_{i_s} | x_{i_{s+1}} \dots x_{i_n}$ . Or le critère  $(K_1)$  nous indique que les deux chaînes sont de longueur  $s + 1$ . Par conséquent,  $n = s + 1$ , ce qui vient contredire l'hypothèse.

Nous allons maintenant montrer la réciproque par induction sur  $n$ . Le critère  $(K_1)$  est toujours vérifié pour les 0-chaînes et les 1-chaînes. Considérons une 2-chaîne  $x|t_1|t_2 = x_{i_1} \dots x_{i_n}$ . Par définition d'une 2-chaîne, on sait que  $s + 1 \leq n \leq 2s - 1$ . Supposons que  $n \neq s + 1$ . On peut alors appliquer le critère  $(K_2)$  : tous les sous-mots de longueur  $s$  de  $x|t_1|t_2$  est dans l'ensemble  $R$ , ce qui contredit le fait que ce soit une 2-chaîne. Par conséquent, les 2-chaînes sont de longueur  $s + 1$ .

Soit  $g|t_1$  une  $2n + 1$ -chaîne pour  $n \geq 0$ . On pose  $x$  dans l'ensemble  $X$  tel que  $g = ax$ . Par induction, le monôme  $t_1$  est de longueur  $s - 1$  et le monôme  $xt_1$  est dans  $R$ . On considère maintenant une  $2n + 2$ -chaîne  $g|t_1|t_2$ . Le monôme  $xt_1t_2$  est une 2-chaîne. Par conséquent le monôme  $t_1t_2$  est dans l'ensemble  $R$  et le monôme  $t_2$  est de longueur 1.

Considérons une  $2n + 3$ -chaîne  $g|t_1|t_2|t_3$ . Nous venons de démontrer que le monôme  $t_2$  est de longueur 1 et par définition d'une  $2n + 3$ -chaîne, le monôme  $t_3$  n'est pas réductible alors que le monôme  $t_2t_3$  est réductible. Cela signifie que le monôme  $t_2t_3$  est dans l'ensemble  $R$ .

## 6.2 Algèbres convergentes

**Théorème 6.2.1.** Soit  $\mathbf{A}(X, R)$  une algèbre telle que le système de réécriture  $(X, R)$  soit  $s$ -homogène et convergent. Si pour tout entier  $n$ , les  $n$ -chaînes sont de longueur  $J(n + 1)$ , alors l'algèbre  $\mathbf{A}$  est  $s$ -kszul.

*Démonstration.* Il s'agit d'une conséquence directe de la résolution d'Anick :

$$\text{Tor}_n^{\mathbf{A}}(\mathbb{K}, \mathbb{K}) \subset \mathbb{K}\langle \mathcal{C}_{n-1} \rangle$$

□



# Bibliographie

- [1] David J Anick. On monomial algebras of finite global dimension. *Transactions of the American Mathematical Society*, 291(1) :291–310, 1985.
- [2] David J Anick. On the homology of associative algebras. *Transactions of the American Mathematical Society*, 296(2) :641–659, 1986.
- [3] Franz Baader and Tobias Nipkow. *Term rewriting and all that*. Cambridge University Press, 1999.
- [4] Roland Berger. Confluence and koszulity. *Journal of Algebra*, 201(1) :243–283, 1998.
- [5] Roland Berger. Weakly confluent quadratic algebras. *Algebras and Representation*, 1(3) :189–213, 1998.
- [6] Roland Berger. Koszulity for nonquadratic algebras. *Journal of Algebra*, 239(2) :705–734, 2001.
- [7] Bruno Buchberger. Bruno buchberger’s phd thesis 1965 : An algorithm for finding the basis elements of the residue class ring of a zero dimensional polynomial ideal. *Journal of symbolic computation*, 41(3) :475–511, 2006.
- [8] Ralf Fröberg and Jörgen Backelin. Koszul algebras, veronese subrings, and rings with linear resolutions. *Rev. Roumaine*, 30, 1985.
- [9] George A Grätzer. *General lattice theory*. Springer, 2003.
- [10] Edward L Green and Eduardo do N Marcos. d-koszul algebras, 2-d-determined algebras and 2-d-koszul algebras. *Journal of Pure and Applied Algebra*, 215(4) :439–449, 2011.
- [11] Yves Guiraud and Philippe Malbos. A polygraphic survey on finiteness conditions for rewriting systems. 2013.
- [12] Jean-Louis Koszul. Homologie et cohomologie des algebres de lie. *Bulletin de la Société Mathématique de France*, 78 :65–127, 1950.
- [13] Yves Lafont. A new finiteness condition for monoids presented by complete rewriting systems (after craig c. squier). *Journal of Pure and Applied Algebra*, 98(3) :229–244, 1995.
- [14] Jean-Louis Loday and Bruno Vallette. Algebraic operads. 346, 2012.
- [15] Saunders Mac Lane. *Homology, classics in mathematics*, 1995.
- [16] Maxwell Herman Alexander Newman. On theories with a combinatorial definition of" equivalence". *The Annals of Mathematics*, 43(2) :223–243, 1942.
- [17] Stewart B Priddy. Koszul resolutions. *Transactions of the American Mathematical Society*, 152(1) :39–60, 1970.
- [18] Stewart B Priddy. Koszul resolutions and the steenrod algebra. *Bulletin of the American Mathematical Society*, 76(4) :834–839, 1970.
- [19] Craig Squier and Friedrich Otto. The word problem for finitely presented monoids and finite canonical rewriting systems. *Rewriting Techniques and Applications*, pages 74–82, 1987.



- [20] John Tate and Michel Van den Bergh. Homological properties of sklyanin algebras. *Inventiones mathematicae*, 124(1-3) :619–648, 1996.
- [21] V Ufnarovski. Introduction to noncommutative gröbner bases theory. *LONDON MATHEMATICAL SOCIETY LECTURE NOTE SERIES*, pages 259–280, 1998.