Preuves de koszulité par réécriture

Sous la direction de Philippe Malbos

Florence Clerc

Introduction

Système de réécriture linéaire

Résolution d'Anick

Opérateurs (Berger)

Bases de Poincaré-Birkhoff-Witt

Koszulité dans le cas quadratique

Objectifs

$$
\begin{tikzcd}[column sep=large, row sep=huge]
\text{base PBW} \arrow[rr, bend left, Rightarrow, "\text{Priddy}"] \arrow[r, phantom, "\equiv"] \arrow[d, equal] & \text{base de Gröbner quadratique} \arrow[r, Rightarrow, "\text{Anick}"] \arrow[d, phantom, "\Vert"] & \text{koszulité} \arrow[d, Leftrightarrow, "\text{Backelin}"] \\
\text{base } X\text{-canonique} \arrow[r, phantom, "\equiv"] & X\text{-confluence} \arrow[r, Rightarrow, "\text{Berger}"] & \text{distributivité}
\end{tikzcd}
$$

Introduction

Système de réécriture linéaire

Résolution d'Anick

Opérateurs (Berger)

Bases de Poincaré-Birkhoff-Witt

Koszulité dans le cas quadratique

Organisation

Système de réécriture linéaire

Résolution d'Anick

Opérateurs (Berger)

Bases de Poincaré-Birkhoff-Witt

Koszulité dans le cas quadratique

Outline

Système de réécriture linéaire

Résolution d'Anick

Opérateurs (Berger)

Bases de Poincaré-Birkhoff-Witt

Koszulité dans le cas quadratique

Système de réécriture abstrait

Un SRA est $(\mathcal{V}, \to)$ avec

- $\mathcal{V}$ un ensemble
- $\to$ relation binaire sur $\mathcal{V}$

Confluence des systèmes de réécriture abstraits

- Confluence

$$\begin{tikzcd}
 & b \arrow[dr, "*"] & \\
a \arrow[ur, "*"] \arrow[dr, "*"'] & & d \\
 & c \arrow[ur, "*"'] &
\end{tikzcd}$$

- Confluence locale
- Terminaison
- Convergence

Introduction

Système de réécriture linéaire

Résolution d'Anick

Opérateurs (Berger)

Bases de Poincaré-Birkhoff-Witt

Koszulité dans le cas quadratique

Confluence des systèmes de réécriture abstraits

- Confluence
- Confluence locale

$$
\begin{tikzcd}
 & b \arrow[dr, bend left, "*"] & \\
a \arrow[ur, bend left] \arrow[dr, bend right] & & d \\
 & c \arrow[ur, bend right, "*"'] &
\end{tikzcd}
$$

- Terminaison
- Convergence

Introduction

Système de réécriture linéaire

Résolution d'Anick

Opérateurs (Berger)

Bases de Poincaré-Birkhoff-Witt

Koszulité dans le cas quadratique

Confluence des systèmes de réécriture abstraits

- Confluence
- Confluence locale
- Terminaison
- Convergence

lemme de Newman

Sous l'hypothèse de terminaison, un SRA est confluent ssi il est localement confluent.

Système de réécriture monomial linéaire compatible avec un ordre monomial

Système de réécriture linéaire (X, R)

- alphabet X
- ensemble R de relations (dans $\mathbb{K}\langle X\rangle \times \mathbb{K}\langle X\rangle$)

monomial

$$R \subset X^* \times \mathbb{K}\langle X\rangle$$

Système de réécriture monomial linéaire compatible avec un ordre monomial

compatible avec un ordre monomial $<$

$$\text{Si } (l, r) \in R \subset X^* \times \mathbb{K}\langle X \rangle \text{ , alors } l > H(r)$$

ordre monomial $<$

bon ordre strict sur X^* compatible avec le produit associatif

- pas de suite infinie décroissante
- si $m < n$, alors $m_1 m m_2 < m_1 n m_2$ pour tous monômes m_1, m_2

Exemple

ordre deglex : $m <_{deglex} n$ si n est plus long que m ou s'ils sont de même longueur $m <_{lex} n$

Convergence des systèmes de réécriture linéaires

- À un SRL (X, R), on associe un SRA $(\mathbb{K}\langle X\rangle, \Rightarrow_R)$.
- On dit que $w \Rightarrow_R w'$ si

$$w = \lambda m m_1 n + g \quad , \quad w' = \lambda m f n + g \quad \text{et} \quad (m_1, f) \in R$$

  (et tel que $m m_1 n$ n'apparaisse pas dans g)
- Les propriétés du SRL s'énoncent sur le SRA.
- En particulier, les SRLMC sont terminants

Paires de réduction

- Cas asphérique : de la forme $(m \Rightarrow^{\alpha} n, m \Rightarrow^{\alpha} n)$.
  Paire confluente :

$$\begin{tikzcd} m \arrow[r, Rightarrow, bend left, "\alpha"] \arrow[r, Rightarrow, bend right, "\alpha"'] & n \end{tikzcd}$$

- Paire de Peiffer
- Branchement de superposition

Paires de réduction

- Cas asphérique
- Paire de Peiffer : $(uv \Rightarrow^{\alpha v} u'v, uv \Rightarrow^{u\beta} uv')$ où $u \Rightarrow^{\alpha} u'$ et $v \Rightarrow^{\beta} v'$. Paire confluente :

$$\begin{tikzcd}
 & u'v \arrow[dr, Rightarrow, "u'\beta"] & \\
uv \arrow[ur, Rightarrow, "\alpha v"] \arrow[dr, Rightarrow, "u\beta"'] & & u'v' \\
 & uv' \arrow[ur, Rightarrow, "\alpha v'"'] &
\end{tikzcd}$$

- Branchement de superposition

Introduction

Système de réécriture linéaire

Résolution d'Anick

Opérateurs (Berger)

Bases de Poincaré-Birkhoff-Witt

Koszulité dans le cas quadratique

Paires de réduction

- Cas asphérique
- Paire de Peiffer
- Branchement de superposition / paire critique : $(uvw \Rightarrow uv', uvw \Rightarrow u'w)$

Paires de réduction

- Cas asphérique
- Paire de Peiffer
- Branchement de superposition / paire critique : $(uvw \Rightarrow uv', uvw \Rightarrow u'w)$

Conséquence

Un SRL est confluent ssi ses paires critiques sont confluentes.

Base de Gröbner G d'un idéal

- famille génératrice de l'idéal telle que la relation de réécriture $\Rightarrow_G$ soit confluente
- algorithme de Buchberger : permet de rendre confluent un ensemble de relations

Exemple

$$(\{x, y\}, x^2 \overset{\alpha}{\Rightarrow} xy)$$

une paire critique de source x^3 :

$$\begin{tikzcd}
 & x^2y \arrow[r, Rightarrow, "\alpha y"] & xy^2 \\
x^3 \arrow[ur, Rightarrow, bend left, "x\alpha"] \arrow[dr, Rightarrow, bend right, "\alpha x"'] & & \\
 & xyx &
\end{tikzcd}$$

Introduction

Système de réécriture linéaire

Résolution d'Anick

Opérateurs (Berger)

Bases de Poincaré-Birkhoff-Witt

Koszulité dans le cas quadratique

Base de Gröbner G d'un idéal

Exemple

$$(\{x, y\}, x^2 \overset{\alpha}{\Rightarrow} xy)$$

une paire critique de source x^3 :

$$\begin{tikzcd}
 & x^2y \arrow[r, Rightarrow, "\alpha y"] & xy^2 \\
x^3 \arrow[ur, Rightarrow, bend left, "x\alpha"] \arrow[dr, Rightarrow, bend right, "\alpha x"'] & & \\
 & xyx \arrow[uur, Rightarrow, dotted] &
\end{tikzcd}$$

Introduction

Système de réécriture linéaire

Résolution d'Anick

Opérateurs (Berger)

Bases de Poincaré-Birkhoff-Witt

Koszulité dans le cas quadratique

Base de Gröbner G d'un idéal

Exemple

$$(\{x, y\}, x^2 \Rightarrow xy, xyx \Rightarrow xy^2)$$

paires critiques de source $xyxx$, $xxyx$ et $xyxyx$:

$$\begin{tikzcd}
 & xyxy \arrow[r, Rightarrow] & xy^3 & & & xyxyy \arrow[r, Rightarrow] & xy^4 \\
xyxx \arrow[ur, Rightarrow, bend left] \arrow[dr, Rightarrow, bend right] & & & & xyxyx \arrow[ur, Rightarrow, bend left] \arrow[dr, Rightarrow, bend right] & & \\
 & xyyx \arrow[uur, Rightarrow, dotted] & & & & xyyyx \arrow[uur, Rightarrow, dotted] &
\end{tikzcd}$$

Par induction, on obtient la base de Gröbner de l'idéal engendré par la relation $x^2 \Rightarrow xy$:

$$G = \{xy^n x \Rightarrow xy^{n+1} | n \geq 0\}$$

Algèbres

Présentation d'algèbre

Une algèbre $\mathbf{A}$ peut s'écrire

$$\mathbf{A} = \mathbb{K}\langle X \rangle / I(R)$$

Le système de réécriture linéaire (X, R) présente l'algèbre $\mathbf{A}$, notée $\mathbf{A}(X, R)$

Autre point de vue

On peut également considérer $\mathbf{A}(V, E)$:

- V espace vectoriel engendré par X
- E sous-espace de $T(V)$ engendré par R.

Les deux points de vue sont équivalents

$$\mathbf{A} = T(\mathbb{K}X)/I(R) = T(V)/I(E)$$

Trois approches considérées

- Anick : résolution calculée via les systèmes de réécriture linéaires
- Berger : projections sur l'espace des termes réduits
- Poincarré-Birkhoff-Witt : du point de vue de l'algèbre

Introduction

Système de réécriture linéaire

Résolution d'Anick

Opérateurs (Berger)

Bases de Poincaré-Birkhoff-Witt

Koszulité dans le cas quadratique

Outline

Système de réécriture linéaire

Résolution d'Anick

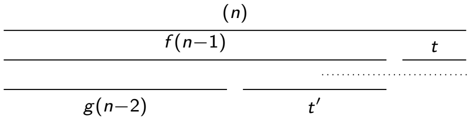
Opérateurs (Berger)

Bases de Poincaré-Birkhoff-Witt

Koszulité dans le cas quadratique

Définition des n-chaînes d'un système de réécriture (X, R)

- par induction sur n : $\mathcal{C}_n$ ensemble des n-chaînes
- $\mathcal{C}_{-1} = \{1\}$ et $\mathcal{C}_0 = X$
- si $\mathcal{C}_{n-1}$ est défini, $f|t$ est une n-chaîne si
  - f est une $(n-1)$-chaîne $f = g|t'$
  - t queue irréductible
  - $t't$ réductible d'une unique façon (par la droite)



Introduction

Système de réécriture linéaire

Résolution d'Anick

Opérateurs (Berger)

Bases de Poincaré-Birkhoff-Witt

Koszulité dans le cas quadratique

Résolution d'Anick

Théorème

Soit $(\mathbf{A}(X,R),\epsilon)$ une $\mathbb{K}$-algèbre augmentée, telle que le système de réécriture (X,R) soit convergent. Pour tout entier n, soit $\mathcal{C}_n$ l'ensemble des n-chaînes associé au système de réécriture (X,R). Alors il existe une résolution libre de $\mathbb{K}$ comme $\mathbf{A}$-module à droite :

$$\cdots \longrightarrow \mathcal{A}_n \xrightarrow{\delta_n} \mathcal{A}_{n-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow \mathcal{A}_0 \xrightarrow{\delta_0} \mathcal{A}_{-1} \xrightarrow{\epsilon} \mathbb{K} \longrightarrow 0$$

où

$$\mathcal{A}_n = \mathbb{K}\langle \mathcal{C}_n \rangle \otimes \mathbf{A}$$

avec, pour x élément de X :

$$\delta_0(x \otimes 1) = x - \eta\epsilon(x)$$

et pour $n \geq 1$:

$$\delta_n(f|t \otimes 1) = f \otimes t + w$$

avec $LT(w) < f|t$ si $w \neq 0$.

Preuve

Construction

On donne la résolution d'Anick :

$$\delta_n(f|t \otimes 1) = f \otimes t - \sigma_{n-1}\delta_{n-1}(f \otimes t)$$

où σ_n est une homotopie contractante définie sur $\ker(\delta_{n-1})$

$$\sigma_n(U) = \lambda g v' w \otimes v + \sigma_n(U - \lambda\delta_n(g v' w \otimes v))$$

avec $U = \lambda f \otimes t + V$ et $f = g|t'$ $(n-1)$-chaîne.

principe de la preuve

- Par induction sur n
- conditions supplémentaires à vérifier, pour $0 \leq j$ et pour $w \in \ker \delta_{j-1}$,

$$\begin{aligned} \delta_{j-1}\delta_j &= 0 && (1)\\ \delta_j\sigma_j &= id_{\ker \delta_{j-1}} && (2)\\ LT(\sigma_j(w)) &= LT(w) && (3) \end{aligned}$$

Exemple

$$\mathbf{A} = \langle x, y | xy - x^2 \rangle$$

Avec l'ordre $x < y$ étendu en l'ordre deglex

- une unique relation $xy \Rightarrow xx$
- pas de paires critiques
- base de Gröbner :
$$G = \{xy \Rightarrow x^2\}$$
- $\mathcal{C}_{-1} = \{1\}$, $\mathcal{C}_0 = \{x, y\}$, $\mathcal{C}_1 = \{xy\}$ et $\mathcal{C}_n = 0$ $(n \geq 2)$
- résolution d'Anick pour l'augmentation $\epsilon(x) = \epsilon(y) = 0$

$$\delta_0(x \otimes 1) = 1 \otimes x \qquad \delta_0(y \otimes 1) = 1 \otimes y$$

$$\delta_1(x|y \otimes 1) = x \otimes y - x \otimes x$$

Exemple

$$\mathbf{A} = \langle x, y | xy - x^2 \rangle$$

Avec l'ordre $y < x$ étendu en l'ordre deglex

- base de Gröbner

$$G = \{xy^n x \Rightarrow xy^{n+1} | n \geq 0\}$$

- n-chaînes : $\mathcal{C}_{-1} = \{1\}$, $\mathcal{C}_0 = \{x, y\}$ et

$$\mathcal{C}_n = \{xy^{a_1}x...xy^{a_n}x | a_1, ..., a_n \geq 0\}$$

- résolution d'Anick pour la même augmentation $\epsilon(x) = \epsilon(y) = 0$

$$\delta_0(x \otimes 1) = 1 \otimes x \qquad \delta_0(y \otimes 1) = 1 \otimes y$$

$$\delta_n(xy^{a_1}x...xy^{a_n}x \otimes 1) = xy^{a_1}x...xy^{a_{n-1}}x \otimes (y^{a_n}x - y^{a_n+1})$$

Outline

Système de réécriture linéaire

Résolution d'Anick

Opérateurs (Berger)

Bases de Poincaré-Birkhoff-Witt

Koszulité dans le cas quadratique

Un rapide aperçu

- repose sur la notion d'opérateurs de réduction (projections sur l'espace des termes réduits)
- permet d'introduire la notion de X-confluence des opérateurs qui correspond à la notion de confluence des règles de réécriture
- dans le cas des algèbres quadratiques, si on a la X-confluence, on introduit la notion de base X-canonique (base de l'algèbre $\mathbf{A}$)

Outline

Système de réécriture linéaire

Résolution d'Anick

Opérateurs (Berger)

Bases de Poincaré-Birkhoff-Witt

Koszulité dans le cas quadratique

Bases de Poincaré-Birkhoff-Witt

- algèbre quadratique $\mathbf{A}(V, E)$ avec $X = \{x_1 < \dots < x_m\}$ base totalement ordonnée de V
- on introduit l'ensemble :

$$S = \{(i_1, i_2) | \overline{x_{i_1} x_{i_2}} \notin Vect\left(\overline{x_{j_1} x_{j_2}} | (j_1, j_2) < (i_1, i_2)\right)\}$$

qui permet de définir

$$\begin{aligned} S^{(0)} &= \emptyset \\ S^{(1)} &= [\![1, m]\!] \\ S^{(2)} &= S \\ S^{(n)} &= \{(i_1, i_2, \dots, i_n) | (i_1, i_2), (i_2, i_3), \dots, (i_{n-1}, i_n) \in S\} \end{aligned}$$

- Si la famille $(\overline{x_\alpha})_{\alpha \in \cup_{n \geq 0} S^{(n)}}$ forme une base de $\mathbf{A}$, alors elle est appelée base de PBW de $\mathbf{A}$.

Exemple

$$\mathbf{A} = \langle x, y | xy - x^2 \rangle$$

Avec l'ordre $x = x_1 < x_2 = y$ étendu en l'ordre deglex

- $$\begin{aligned} S &= \{(1,1),(2,1),(2,2)\}, \\ S^{(n)} &= \{(\underbrace{2,\dots,2}_{k},\underbrace{1,\dots,1}_{l}) | k+l = n \text{ et } 0 \leq k \leq n\}. \end{aligned}$$
- en particulier, pour $n = 3$:
  $S^{(3)} = \{(2,2,2),(2,2,1),(2,1,1),(1,1,1)\}$.
- l'ensemble $\{\overline{y^3}, \overline{y^2x}, \overline{yx^2}, \overline{x^3}\}$ est bien une base de $\mathbf{A}_3$.
- base de PBW

Exemple

$$\mathbf{A} = \langle x, y | xy - x^2 \rangle$$

Avec l'ordre $y = x_1 < x_2 = x$ étendu en l'ordre deglex

- Ensemble S :

$$\begin{array}{rcl} S & = & \{(1,1),(1,2),(2,1)\} \\ S^{(3)} & = & \{(1,1,2),(1,1,1),(1,2,1),(2,1,1),(2,1,2)\} \end{array}$$

- Ce n'est pas une base PBW car $\{\overline{y^2x}, \overline{y^3}, \overline{yxy}, \overline{xy^2}, \overline{xyx}\}$ n'est pas libre dans $\mathbf{A}_3$:

$$\overline{xyx} = \overline{xy^2}$$

Outline

Système de réécriture linéaire

Résolution d'Anick

Opérateurs (Berger)

Bases de Poincaré-Birkhoff-Witt

Koszulité dans le cas quadratique

Koszulité

Tor

- On se donne une résolution projective $P_\bullet$ de $\mathbb{K}$ comme **A**-module
$$Tor_n^{\mathbf{A}}(\mathbb{K},\mathbb{K}) = H_n(P_\bullet \otimes_{\mathbf{A}} \mathbb{K})$$
- Peut être vu comme un module bigradué

koszulité

Une algèbre **A** est de type koszul si pour tout $i \neq j$,

$$Tor_{i,j}^{\mathbf{A}}(\mathbb{K},\mathbb{K}) = 0$$

Koszulité dans le cas quadratique

$$
\begin{tikzcd}
\text{base PBW} \arrow[r, equal] \arrow[d, equal] \arrow[rr, Rightarrow, bend left, "\text{Priddy}"] & \text{base de Gröbner quadratique} \arrow[r, Rightarrow, "\text{Anick}"] \arrow[d, equal] & \text{koszulité} \arrow[d, Leftrightarrow, "\text{Bachelin}"] \\
\text{base } X\text{-canonique} \arrow[r, equal] & X\text{-confluence} \arrow[r, Rightarrow, "\text{Berger}"] & \text{distributivité}
\end{tikzcd}
$$

Correspondance entre PBW et base de Gröbner

Théorème

Posons

$$G = \left\{ x_{i_1} x_{i_2} - \sum_{\substack{(j_1,j_2)<(i_1,i_2) \\ (j_1,j_2)\in S}} \lambda_{(i_1,i_2)}^{(j_1,j_2)} x_{j_1} x_{j_2} \,\middle|\, (i_1, i_2) \in [\![1, m]\!]^2 \setminus S \right\}$$

Les trois propriétés suivantes sont équivalentes :

1. L'algèbre **A** est PBW.
2. L'ensemble G est une base de Gröbner de $I(E)$.
3. La relation de réécriture $\Rightarrow_G$ est confluente.

base de Gröbner et Koszulité

Théorème

Soit $\mathbf{A}(X, R)$ une algèbre telle que le système de réécriture (X, R) soit convergent et tel que les relations dans l'ensemble R soient quadratiques. L'algèbre $\mathbf{A}$ est de type Koszul.

Proof.

La longueur des n-chaînes est (n+1).
Conséquence immédiate de la résolution d'Anick $\square$

Koszulité dans le cas quadratique

Théorème

Soit $\mathbf{A}(X, R)$ une algèbre présentée par un système de réécriture (X, R). On pose V l'espace vectoriel engendré par X et E l'espace vectoriel engendré par R. Les quatre propriétés suivantes sont équivalentes :

1. L'idéal engendré par les relations R admet une base de Gröbner quadratique.
2. Les opérateurs $S_1 = S \otimes id_V$ et $S_2 = id_V \otimes S$ où l'opérateur S est défini par $\ker(S) = E$ sont X-confluents.
3. L'algèbre $\mathbf{A}$ admet une base X-canonique.
4. L'algèbre $\mathbf{A}$ admet une base de Poincaré-Birkhoff-Witt.

Si ces propriétés sont vérifiées, alors la base X-canonique et la base de Poincarré-Birkhoff-Witt sont identiques et de plus l'algèbre $\mathbf{A}$ est koszul.

Exemple

ordre $x < y$

- base de Gröbner :

$$G = \{xy \Rightarrow x^2\}$$

- base PBW
- de type Koszul

ordre $y < x$

- base de Gröbner :

$$G = \{xy^n x \Rightarrow xy^{n+1} | n \geq 0\}$$

- pas de base PBW