Étude des traductions à double négation dans le cadre des systèmes de preuves avec focus

Florence Clerc sous la direction de Dale Miller
PARSIFAL - INRIA

4 septembre 2012

Outline

Introduction

- nombreux assistants de preuve aux formalismes différents : CoQ, Isabelle
- projet européen proofcert
- objectif de ce stage : mieux comprendre les liens entre logiques polarisées (contenu par rapport aux logiques non polarisées)
- basé sur les travaux de Dale Miller et Chuck Liang

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{LK} \arrow[r, dashed] \arrow[d] & \mathbf{LJ} \arrow[d] \\
\mathbf{LKF} \arrow[r, leftrightarrow] & \mathbf{LJF}
\end{tikzcd}$$

Outline

Quelques remarques d'ordre général

- règle d'introduction réversible : connecteur négatif
  règle d'introduction non-réversible : connecteur positif
- dans LKF et LJF : polarité de la formule = polarité du connecteur le plus haut
- phase asynchrone = phase de traitement des connecteurs négatifs
- phase synchrone = phase de traitement des connecteurs positif
  choix faits dans la phase synchrone
- changement de notations par rapport à l'article original

LKF

Decision, Reaction, Initial

$$\frac{\vdash \Theta \Uparrow N}{\vdash \Theta \Downarrow N}\ \mathit{Release} \qquad \frac{\vdash P, \Theta \Downarrow P}{\vdash P, \Theta \Uparrow .}\ \mathit{Focus/Decide}$$

$$\frac{\vdash \Theta, C \Uparrow \Gamma}{\vdash \Theta \Uparrow \Gamma, C}\ \mathit{Store} \qquad \frac{}{\vdash \neg P, \Theta \Downarrow P}\ \mathit{Init}\ (P \text{ littéral})$$

Connecteurs asynchrones

$$\frac{\vdash \Theta \Uparrow \Gamma, A \quad \vdash \Theta \Uparrow \Gamma, B}{\vdash \Theta \Uparrow \Gamma, A \wedge^- B}\ \wedge^- \qquad \frac{\vdash \Theta \Uparrow \Gamma, A, B}{\vdash \Theta \Uparrow \Gamma, A \vee^- B}\ \vee^- \qquad \frac{\vdash \Theta \Uparrow \Gamma, A}{\vdash \Theta \Uparrow \Gamma, \forall x A}\ \forall$$

Connecteurs synchrones

$$\frac{\vdash \Theta \Downarrow A \quad \vdash \Theta \Downarrow B}{\vdash \Theta \Downarrow A \wedge^+ B}\ \wedge^+ \qquad \frac{\vdash \Theta \Downarrow A_i}{\vdash \Theta \Downarrow A_1 \vee^+ A_2}\ \vee^+ \qquad \frac{\vdash \Theta \Downarrow A[t/x]}{\vdash \Theta \Downarrow \exists x A}\ \exists$$

P positif, N negatif, C formule positive ou littéral négatif
Θ ensemble de formules positives et de littéraux négatifs
x non libre dans Θ, Γ
séquents finaux de la forme : $\vdash . \Uparrow \Gamma$.

Forme des preuves dans LKF

$$\overline{}\ \textit{init}$$

$$\vdots$$

$$\overline{\vdash \Gamma_1 \Uparrow .}\ \textit{Focus}$$

$$\vdots$$

phase asynchrone($\Uparrow$)

$$\vdots$$

$$\cfrac{\text{phase synchrone}(\Downarrow)}{\vdash \Gamma_2 \Uparrow .}\ \textit{Focus}$$

$$\vdots$$

$$\overline{\vdash \Gamma_n \Uparrow .}\ \textit{Focus}$$

$$\vdots$$

$$\overline{\vdash . \Uparrow \phi}$$

de $\vdash \Gamma_1 \Uparrow .$ à $\vdash \Gamma_2 \Uparrow .$: bipole

LJF

Règles de Decision et de Reaction

$$\frac{N, \Gamma \Downarrow N \to R}{\Gamma, N; . \to R; .}\ F_l \qquad \frac{\Gamma \to\Downarrow P}{\Gamma; . \to P; .}\ F_r \qquad \frac{\Gamma; P \to R; .}{\Gamma \Downarrow P \to R}\ R_l \qquad \frac{\Gamma; . \to .; N}{\Gamma \to\Downarrow N}\ R_r$$

$$\frac{C, \Gamma; \Theta \to .; R}{\Gamma; \Theta, C \to .; R}\ S_l \qquad \frac{C, \Gamma; \Theta \to R; .}{\Gamma; \Theta, C \to R; .}\ S_l \qquad \frac{\Gamma; \Theta \to D; .}{\Gamma; \Theta \to .; D}\ S_r$$

Règles Initiales

$$\frac{}{P, \Gamma \to\Downarrow P}\ I_r,\ \text{atomic } P \qquad \frac{}{\Gamma \Downarrow N \to N}\ I_l,\ \text{atomic } N$$

P positif, N négatif
C une formule négative ou un atome positif
D une formule positive ou un atome négatif.

LJF

Règles d'Introduction

$$\frac{\Gamma \Downarrow A_i \to R}{\Gamma \Downarrow A_1 \wedge^- A_2 \to R}\ \wedge^- L \qquad \frac{\Gamma;\Theta \to .;A \quad \Gamma;\Theta \to .;B}{\Gamma;\Theta \to .;A \wedge^- B}\ \wedge^- R$$

$$\frac{\Gamma;\Theta,A,B \to .;R}{\Gamma;\Theta,A \ \wedge^+ B \to .;R}\ \wedge^+ L \quad \frac{\Gamma;\Theta,A,B \to R;.}{\Gamma;\Theta,A \ \wedge^+ B \to R;.}\ \wedge^+ L$$

$$\frac{\Gamma \to\Downarrow A \quad \Gamma \to\Downarrow B}{\Gamma \to\Downarrow A \wedge^+ B}\ \wedge^+ R$$

$$\frac{\Gamma;\Theta,A \to .;R \quad \Gamma;\Theta,B \to .;R}{\Gamma;\Theta,A \vee B \to .;R}\ \vee L \quad \frac{\Gamma;\Theta,A \to R;. \quad \Gamma;\Theta,B \to R;.}{\Gamma;\Theta,A \vee B \to R;.}\ \vee L$$

$$\frac{\Gamma \to\Downarrow A_i}{\Gamma \to\Downarrow A_1 \vee A_2}\ \vee R$$

$$\frac{\Gamma;\Theta,A \to .;R}{\Gamma;\Theta,\exists yA \to .;R}\ \exists L \qquad \frac{\Gamma;\Theta,A \to R;.}{\Gamma;\Theta,\exists yA \to R;.}\ \exists L \qquad \frac{\Gamma \to\Downarrow A[t/x]}{\Gamma \to\Downarrow \exists xA}\ \exists R$$

$$\frac{\Gamma \Downarrow A[t/x] \to R}{\Gamma \Downarrow \forall xA \to R}\ \forall L \qquad \frac{\Gamma;\Theta \to .;A}{\Gamma;\Theta \to .;\forall yA}\ \forall R$$

y non libre dans Γ, Θ, ou R.

Résultats sur les logiques polarisées

Résultats donnés dans [2]

Théorème

LKF est correcte et complète par rapport à la logique classique.

Théorème

LJF est correcte et complète par rapport à la logique intuitioniste.

Délais dans LKF

- Façon de forcer la polarité d'une formule
- B, $\partial^- B$, $\partial^+ B$ logiquement équivalents
- Règles d'introduction

$$\frac{\vdash \theta \Uparrow \Gamma, B}{\vdash \theta \Uparrow \Gamma, \partial^- B} \qquad \frac{\vdash \theta \Downarrow \Gamma, B}{\vdash \theta \Downarrow \Gamma, \partial^+ B}$$

Outline

Resultats généraux

- traduction de Kuroda : A, B formules du 1er ordre
  $(B)^K = \neg\neg(B)'$ avec

$$\begin{array}{rl} (P)' = P \text{ (P atome)} & (\neg P)' = \neg P \text{ (P atome)} \\ (A \wedge B)' = (A)' \wedge (B)' & (A \vee B)' = (A)' \vee (B)' \\ (\exists x.B)' = \exists x.(B)' & (\forall x.B)' = \forall x.\neg\neg(B)' \end{array}$$

- traduction de Gödel-Gentzen : A, B formules du 1er ordre

$$\begin{array}{rl} (P)^{GG} = \neg\neg P \text{ (P atome)} & (\neg P)^{GG} = \neg P \text{ (P atome)} \\ (A \wedge B)^{GG} = (A)^{GG} \wedge (B)^{GG} & (A \vee B)^{GG} = \neg\neg\left((A)^{GG} \vee (B)^{GG}\right) \\ (\exists x.B)^{GG} = \neg\neg\exists x.(B)^{GG} & (\forall x.B)^{GG} = \forall x.(B)^{GG} \end{array}$$

Kuroda translation in LKF/LJF

LK **LJ**

$$
\begin{tikzcd}
B \arrow[r, "(.)^K"] \arrow[d, "(.)_K"'] & (B)^K \arrow[d, "\hat{\cdot}"] \\
(B)_K \arrow[r, leftrightarrow] & \widehat{(B)^K}
\end{tikzcd}
$$

LKF **LJF**

Définition des flèches

- de LK vers LKF : $(B)_K = \partial^+(B)''$ avec

$$(A \wedge B)'' = (A)'' \wedge^+ (B)'' \quad (A \vee B)'' = (A)'' \vee^+ (B)''$$
$$(\exists x.B)'' = \exists x.(B)'' \quad (\forall x.B)'' = \forall x.\partial^+(B)''$$
$$(P)'' = P \text{ (P atome positif)} \quad (\neg P)'' = \neg(P)''$$

- de LJ vers LJF :

$$\widehat{A \wedge B} = \widehat{A} \wedge^+ \widehat{B} \quad \widehat{A \vee B} = \widehat{A} \vee^+ \widehat{B}$$
$$\widehat{\exists x.B} = \exists x.\widehat{B} \quad \widehat{\forall x.B} = \forall x.\widehat{B}$$
$$\widehat{P} = P \text{ (P atome positif)} \quad \widehat{\neg B} = \neg\widehat{B}$$

Illustration de l'idée

in LJF :

$$\neg(A \vee^+ \neg A), A \rightarrow\Downarrow A$$
$$\neg(A \vee^+ \neg A), A \rightarrow\Downarrow A \vee^+ \neg A$$
$$\neg(A \vee^+ \neg A), A \Downarrow \neg(A \vee^+ \neg A) \rightarrow .$$
$$\neg(A \vee^+ \neg A), A; . \rightarrow .; .$$
$$\neg(A \vee^+ \neg A), A; . \rightarrow .; .$$
$$\neg(A \vee^+ \neg A); A \rightarrow .; .$$
$$\neg(A \vee^+ \neg A); . \rightarrow \neg A; .$$
$$\neg(A \vee^+ \neg A); . \rightarrow .; \neg A$$
$$\neg(A \vee^+ \neg A) \rightarrow\Downarrow \neg A$$
$$\neg(A \vee^+ \neg A) \rightarrow\Downarrow A \vee^+ \neg A$$
$$\neg(A \vee^+ \neg A) \Downarrow \neg(A \vee^+ \neg A) \rightarrow .$$
$$\neg(A \vee^+ \neg A); . \rightarrow .; .$$
$$.; \neg(A \vee^+ \neg A) \rightarrow .; .$$
$$.; . \rightarrow .; \neg\neg(A \vee^+ \neg A)$$

in LKF :

$$\vdash \partial^+(A \vee^+ \neg A), \neg A \Downarrow A$$
$$\vdash \partial^+(A \vee^+ \neg A), \neg A \Downarrow A \vee^+ \neg A$$
$$\vdash \partial^+(A \vee^+ \neg A), \neg A \Downarrow \partial^+(A \vee^+ \neg A)$$
$$\vdash \partial^+(A \vee^+ \neg A), \neg A \Uparrow .$$
$$\vdash \partial^+(A \vee^+ \neg A) \Uparrow \neg A$$
$$\vdash \partial^+(A \vee^+ \neg A) \Downarrow \neg A$$
$$\vdash \partial^+(A \vee^+ \neg A) \Downarrow A \vee^+ \neg A$$
$$\vdash \partial^+(A \vee^+ \neg A) \Downarrow \partial^+(A \vee^+ \neg A)$$
$$\vdash \partial^+(A \vee^+ \neg A) \Uparrow .$$
$$\vdash . \Uparrow \partial^+(A \vee^+ \neg A)$$

Étude des traductions à double négation dans le cadre des systèmes de preuves avec focus

Florence Clerc sous la direction de Dale Miller
PARSIFAL - INRIA

Introduction

Deux logiques polarisées : LKF et LJF

Traductions Double-négation

Dans les logiques non polarisées

Travail effectué

Questions ouvertes et travaux à considérer

Conclusion

Résultat préliminaire sur la traduction de Kuroda

Lemme

Soit une preuve dans LKF de $\vdash . \Uparrow (\phi)_K$.
Tout séquent de la forme $\vdash \Gamma(\Uparrow$ *ou* $\Downarrow)\Delta$ *est tel que* $\Gamma = \mathcal{U}, \mathcal{N}$ *avec :*

- $\mathcal{N}$ *ensemble d'atomes niés*
- $\mathcal{U}$ *ensemble de formules retardées positivement dont* $(\phi)_K$.

Démonstration.

Vrai pour tous les séquents de la forme $\vdash \Gamma \Uparrow .$:

- Restrictions d'utilisation de store : pas de formules négatives autre que des atomes niés
- Besoin d'utiliser Release après Store
  Pour ça besoin d'une formule négative et unique connecteur négatif autorisé : $\forall$

S'étend au reste de la preuve car partie sur laquelle ne porte pas le focus ne peut que décroître $\square$

Résultat sur la traduction de Kuroda

Théorème

B démontrable dans LK $\Leftrightarrow (B)_K$ démontrable dans LKF $\Leftrightarrow \widehat{(B)^K}$ démontrable dans LJF.
De plus, bijection entre les bipoles de la preuve dans LKF de $(B)_K$ et les bipoles de la preuve dans LJF de $\widehat{(B)^K}$.

Outline

Autres problèmes considérés dans le cadre de ce stage

- multifocus dans LJF
- traduction de Gödel-Gentzen : gestion du $\vee$

Travaux en lien

shift

- sous-formules de la même polarité que le connecteur supérieur
- opérateur shift pour changer de polarité
- d'abord regardé le lien entre LJ et les logiques polarisées avec shift

Travaux en lien

LC (Girard [1])

- tableau de polarités qui depend du connecteur et de la polarité des sous-formules
- basé sur les espaces de corrélation
- basé sur la sémantique

Sémantique, Aspects catégoriques

Outline

Merci pour votre attention

Des Questions ?

Bibliographie

- J.Y. Girard.
  A new constructive logic : classical logic.
  1991.
- C. Liang and D. Miller.
  Focusing and polarization in linear, intuitionistic, and classical logics.
  Theoretical Computer Science, 410(46) :4747–4768, 2009.