

Topologie algébrique et structure du calcul

Florence Clerc

Il est devenu de plus en plus apparent que l'informatique était présente dans notre vie de tous les jours, et notamment au moyen de la programmation. De récents événements ont posé la question de la sécurité de ces programmes (par exemple au niveau des limiteurs de vitesse dans les voitures). Plusieurs méthodes existent pour s'assurer de la sécurité du code : des méthodes a posteriori (vérification, interprétation abstraite) et des méthodes a priori (formalisation de ce qu'est un programme). Ce travail s'est concentré sur la formalisation de la structure des calculs au moyen du formalisme des catégories.

Une catégorie est la donnée d'objets et de fonctions (appelées morphismes) entre ces objets. Elle peut être représentée de façon souvent plus concise par la donnée d'objets, de générateurs pour les morphismes et de relations entre morphismes. Cette définition s'étend aux dimensions supérieures : dans une 2-catégorie, il y a également des fonctions (appelées 2-cellules) entre les morphismes, une présentation de 2-catégorie est la donnée d'objets, de générateurs pour les morphismes, de générateurs pour les 2-cellules et de relations sur les 2-cellules.

Nous avons montré que, dans le cadre des catégories, sous certaines hypothèses, pour un sous-ensemble S des générateurs de morphismes, il "revient au même" :

- d'inverser les générateurs de S (correspondant à des applications réversibles),
- de quotienter par les générateurs de S (correspondant à prendre des classes d'équivalence d'objets modulo S),

Une des premières applications de ce travail est l'étude des actions réversibles : quand on se crée un compte sur un site, il est possible de revenir en arrière (par exemple, on peut modifier les champs déjà rentrés comme le nom) jusqu'au moment où on crée le compte. On voit naturellement émerger un formalisme pour gérer ces cas qui permettront donc de formaliser la création de compte, les paiements en ligne etc.

L'objectif initial de ce travail de thèse est d'étudier la théorie algébrique des monades. Ces dernières sont des structures mathématiques qui modélisent en particulier les effets en informatique (erreur, non-déterminisme etc). Pour cela, nous devons travailler dans le cadre des 3-catégories. Beaucoup de problèmes subsistent encore, mais une fois cette partie du travail effectuée, il sera possible de donner un modèle du calcul avec des monades, et donc un modèle de la gestion d'effets (erreurs par exemple) dans l'exécution du code.

Référence

- [1] Florence Clerc, Samuel Mimram, *Presenting a Category Modulo a Rewriting System*, RTA 2015.